
3 1761 07550531 3

850

46

I

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
68462 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND
EXAMINATEUR SUPPLÉANT D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TOME IV.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET TRIGONOMETRIE.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1923

PRÉFACE.

Ce quatrième et dernier tome de mon Cours de Mathématiques spéciales comprend la Géométrie descriptive et la Trigonométrie.

En Géométrie descriptive, j'ai suivi sensiblement le programme de l'École Polytechnique. Toutefois, j'ai jugé inutile de reprendre les problèmes sur la droite et le plan, que j'ai supposés connus du lecteur. Par contre, j'ai ajouté à l'étude des quadriques réglées quelques paragraphes sur l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et le paraboloïde elliptique, surfaces qui ne me paraissent pas moins intéressantes que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique. En outre, dans le chapitre de la perspective, il m'a semblé utile de compléter les notions théoriques du programme par quelques notions pratiques sur la mise en perspective d'une figure quelconque de l'espace.

J'ai rassemblé, dans le premier chapitre, tous les principes généraux concernant la représentation des lignes et des surfaces et la recherche de leurs intersections. Cela m'a permis d'alléger la rédaction des chapitres suivants, tout en m'évitant de répéter plusieurs fois une même théorie.

Dans tout le cours de l'ouvrage, j'ai fait un fréquent usage des résultats obtenus dans le tome II et, en particulier, je n'ai pas craint de faire largement appel aux notions si fécondes de points à l'infini ou d'éléments imaginaires.

Les exercices comportent surtout des épures complètes, analogues à celles des concours d'admission aux grandes écoles. La crainte d'une excessive majoration du prix de vente m'a empêché de les présenter sur des planches spéciales, ce qui a entraîné une forte réduction d'échelle et conséquemment une lisibilité défectueuse. Je

m'excuse à l'avance auprès du lecteur pour la fatigue que je vais imposer à ses organes visuels et je lui conseille de reproduire lui-même, sur une feuille quart grand aigle, les épures qu'il jugera par trop confuses.

A ces épures complètes, j'ai généralement ajouté quelques questions du genre de celles qu'on pose aux examens oraux, mais en les réservant presque toujours pour les exercices proposés.

Dans le chapitre des surfaces topographiques, j'ai jugé qu'il serait dénué d'intérêt de résoudre, par la méthode des projections cotées, des questions relatives à des surfaces géométriques. J'ai envisagé, au contraire, des exercices d'un caractère pratique, exécutés sur un plan directeur du front de Champagne en 1917.

La Trigonométrie ne comprend que deux chapitres, l'un relatif aux propriétés générales des lignes trigonométriques et l'autre relatif à la résolution des triangles. Bien que presque tout ce programme soit élémentaire, je l'ai repris en entier, mais en le traitant d'un point de vue conforme à l'esprit général du Cours et en faisant appel à la fois au tome II et au tome I, ce qui m'a permis d'en condenser la rédaction au maximum.

Il me reste maintenant à exprimer toute ma reconnaissance à mes éditeurs, pour la persévérance dont ils ont fait preuve, en poursuivant jusqu'au bout, malgré les difficultés occasionnées par la guerre, la publication de ce long travail.

Je dois également remercier ceux de mes lecteurs qui m'ont apporté leurs encouragements, au cours d'une tâche parfois bien ingrate, en même temps que des suggestions intéressantes, dont je tiendrai le plus grand compte dans les prochaines éditions.

J. Haag.

Clermont-Ferrand, décembre 1921.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LA REPRÉSENTATION DES LIGNES ET DES SURFACES ET SUR LA RECHERCHE DE LEURS INTERSECTIONS.

1. **Représentation d'une ligne.** — En Géométrie descriptive, une ligne se représente par ses deux projections.

THÉORÈME. — *La tangente en un point m de la projection c d'une courbe* C *de l'espace est la projection de la tangente à* C *au point* M *qui se projette en m.*

Démontrons le théorème pour une *projection conique* quelconque, de sommet P.

Les courbes c et C sont situées sur un même cône, de sommet P. Les points m et M appartiennent à une même génératrice G de ce cône. Les plans Pmt et PMT lui sont respectivement tangents en m et en M et, par suite, sont confondus (t. II, n° 375). Il en résulte évidemment que mt est la projection de MT. C. Q. F. D.

Cas d'exception. — La démonstration précédente est en défaut si la droite MT passe par P, car le plan MTP est indéterminé et la projection de MT se réduit au point m. Cette circonstance peut se présenter dans deux cas :

Premier cas. — Le point P *se trouve sur* MT, *mais non en* M.

Le plan tangent au cône le long de G, qui est la limite du plan passant par PM et par la génératrice infiniment voisine PM′, n'est autre que le plan osculateur en M à C (t. II, n° 225, théorème II) et la tangente *mt* est la trace de ce plan sur le plan de projection. La courbe C traversant son plan osculateur, mais ne traversant pas ses autres plans tangents, la courbe *c* traverse la tangente *mt*, mais ne traverse pas une droite quelconque passant par *m*. Il en résulte nécessairement que *le point m est un point de rebroussement de c* (t. II, n° 198).

Deuxième cas. — Le point P *se trouve en* M. — Le plan tangent au cône le long de G est encore le plan osculateur en M à C et la trace de ce plan sur le plan de projection est toujours la tangente *mt* cherchée. Mais, cette fois, si l'on prend, sur C, deux points M′ et M″ situés de part et d'autre de M, l'un d'eux se trouve du même côté que sa projection par rapport à M, tandis que l'autre se trouve du côté opposé. Il s'ensuit que tout plan traversant C en M coupe le plan de projection suivant une droite ne traversant pas *c* en *m* et inversement. On conclut de là que la courbe *c* traverse toute droite passant par *m*, à l'exception de sa tangente. Autrement dit, *le point m est un point ordinaire* sur la courbe *c*.

Cas de la projection orthogonale. — S'il s'agit, par exemple, de la projection horizontale, les deux cas que nous venons de considérer correspondent, le premier à une courbe C ayant une tangente verticale en M, ce dernier point étant à distance finie, le deuxième à une courbe C ayant une asymptote verticale.

2. Représentation d'une surface. — En Géométrie descriptive, une surface se représente ordinairement par ses *contours apparents*.

Soit un observateur, ayant son œil en P et regardant la surface S. Parmi les rayons visuels qui lui parviennent, il y en a qui rencontrent S et d'autres qui ne la rencontrent pas. Ils sont séparés les uns des autres par le cône des rayons tangents, c'est-à-dire par le cône circonscrit à S et de sommet P. Si la surface S limite un corps solide opaque et d'éclairement uniforme et si, derrière ce corps solide, se trouve un écran plan E, d'éclairement différent, il est clair que le corps solide aura l'aspect d'un disque posé sur E et limité par la

trace c du cône précédent sur l'écran. Cette trace porte le nom de *contour apparent en projection* de S sur E, à partir du point P. Tous les points de E qui lui sont intérieurs sont cachés par S, pour l'œil placé en P.

La courbe de contact C du cône avec la surface S porte le nom de *contour apparent dans l'espace*. Elle jouit des propriétés suivantes :

Théorème I. — *Le contour apparent dans l'espace sépare, sur la surface, les régions vues des régions cachées.*

En effet, toute droite, issue de P, intérieure au cône et voisine de ce cône, rencontre la surface S en deux points M et M' voisins de C et situés de part et d'autre de cette ligne. Si le premier est vu (1), le second est nécessairement caché par le premier, de sorte que l'un est dans la région vue et l'autre dans la région cachée. Quand on traverse la ligne C, on passe d'une région dans l'autre.

Théorème II. — *Si une courbe* Γ, *tracée sur* S, *rencontre* C *en* M, *sa projection* γ *est tangente en* m *à* c.

En effet, la tangente commune en m à γ et à c est la trace, sur E, du plan tangent en M à la surface S.

Remarque I. — Bien entendu, ce théorème est en défaut si la tangente en M à Γ passe par P (nº 1).

Remarque II. — Si Γ traverse C, elle est vue d'un côté de cette ligne et cachée de l'autre; la ponctuation de γ change en m.

Théorème III. — *Si deux surfaces* S *et* S_1 *sont circonscrites l'une à l'autre, leurs contours apparents en projection sont tangents.*

En effet, soit M un point de rencontre de la ligne de contact avec

(1) Il peut arriver que les points M et M' soient tous deux cachés. Dans ce cas, C n'est plus un contour apparent, au sens physique du mot. Pour qu'il le soit, il suffirait d'enlever une ou plusieurs nappes de S, afin de rétablir la visibilité de l'un des deux points M et M'. Dans les épures, un tel contour apparent est représenté en trait ponctué. Il renseigne sur la forme des parties cachées de la surface. Cette circonstance ne se présente jamais, si la surface est convexe.

le contour apparent de la première surface, par exemple. Le plan tangent en ce point à S passe par P. Mais, il est aussi tangent à S_1, puisque M appartient à la ligne de contact. Donc, M appartient aussi au contour apparent de S_1. En projection, les deux contours apparents, ainsi que la ligne de contact sont tangents, en *m*, à la trace du plan tangent ci-dessus. C. Q. F. D.

3. Le cône de rayons visuels envisagé au numéro précédent et qui sépare les rayons rencontrant la surface des rayons ne la rencontrant pas peut quelquefois comprendre des nappes non tangentes à S. Ceci arrive lorsque la surface présente une ligne d'arrêt A. Cette ligne doit être comprise dans le contour apparent C. Mais les théorèmes I et II précédents ne doivent pas lui être appliqués.

Si la surface S possède une ligne multiple L (t. II, n° 206), le plan tangent en un point quelconque M de cette ligne est, comme on sait, indéterminé. Le plan qui contient P et la tangente en M à L peut être considéré comme tangent à S en M, de sorte qu'en théorie, la ligne L doit être regardée comme faisant partie du contour apparent dans l'espace. Cela est vrai aussi en pratique, si l'on considère que l'éclairement change nécessairement quand on traverse la ligne L, en passant d'une nappe sur l'autre.

Les théorèmes I et II ne s'appliquent pas non plus à une telle extension du contour apparent.

4. En Géométrie descriptive, il y a deux contours apparents, obtenus en prenant le point P à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan horizontal ou au plan vertical. Ils sont appelés respectivement *contour apparent horizontal* et *contour apparent vertical*.

Le contour apparent horizontal est seulement tracé en projection horizontale, car cette projection est seule intéressante, au point de vue de la représentation de la surface. Ce n'est que pour elle que les théorèmes I et II sont applicables.

De même, le contour apparent vertical n'est tracé qu'en projection verticale.

5. **Ombres.** — Supposons que, dans les considérations des trois numéros précédents, le point P, au lieu d'être l'œil de l'observateur, soit une source lumineuse. Les rayons visuels deviennent des rayons lumineux émis par cette source. La ligne C est appelée *ligne d'ombre propre*.

Si l'on applique le théorème I du n° 2, on voit que cette ligne

sépare, sur la surface S, la région éclairée de la région qui ne l'est pas. Cette dernière est habituellement couverte de hachures, dans les épures.

La ligne c est appelée *ligne d'ombre portée* par S sur le plan E. Il est évident qu'elle limite la région de ce plan qui ne reçoit pas de lumière de la source P, à cause de l'arrêt des rayons lumineux par la surface S. Cette région est aussi couverte de hachures.

Plus généralement, on peut considérer l'ombre portée par S sur une autre surface quelconque S'. C'est l'intersection de cette dernière avec le cône d'ombre. La région à couvrir de hachures est celle qui est intérieure au cône.

Lorsque le point P est à distance finie, l'ombre est dite *au flambeau*. S'il est à l'infini, l'ombre est dite *au soleil*. Dans ce dernier cas, on a l'habitude de prendre la direction des rayons lumineux inclinée à 45° sur la ligne de terre dans les deux projections.

On peut aussi considérer l'ombre portée par une ligne L sur une surface S. C'est la trace, sur S, du cône de sommet P et admettant L pour directrice.

6. **Intersections.** — I. *Intersection d'une ligne* L *et d'une surface* S. — On coupe la surface S par une *surface auxiliaire* A passant par L et choisie de manière que l'intersection L' soit aussi simple que possible. Puis on prend les points de rencontre des deux lignes L et L'. Ce sont les points cherchés.

II. *Intersection de deux surfaces* S *et* S_1. — On coupe par une *surface auxiliaire variable* A. Elle coupe les deux surfaces proposées suivant deux lignes L et L_1, qui se coupent, à leur tour, en un certain nombre de points appartenant tous à l'intersection C, que l'on se propose de construire. Soit M l'un d'eux; on l'appelle *point courant*, parce que, lorsqu'on fait varier A, il décrit la ligne C.

Il est utile de savoir *construire la tangente* MT en ce point à C. A cet effet, on peut employer deux méthodes.

Première méthode : Méthode des plans tangents. — On prend l'intersection des plans tangents P et P_1 en M aux deux surfaces. Cette intersection est évidemment la tangente cherchée.

Deuxième méthode : Méthode des normales. — On construit les

normales MN et MN_1 en M aux deux surfaces. La tangente cherchée doit être perpendiculaire à la fois à ces deux normales; elle est donc perpendiculaire au plan NMN_1, lequel n'est autre que le plan normal à la courbe C.

Ces deux méthodes sont, au fond, identiques et ne diffèrent que par la plus ou moins grande facilité d'exécution de l'épure. On adopte la première ou la seconde, suivant qu'il paraît plus facile de construire les plans tangents ou les normales.

Cas d'exception. — I. *Les deux surfaces sont tangentes en* M. — Les deux méthodes deviennent illusoires, parce que les plans tangents se confondent, ainsi que les normales. On sait d'ailleurs (t. II, n° 343) que, dans ce cas, *l'intersection présente un point double en* M, de sorte qu'en réalité, il y a deux tangentes. Pour les déterminer, on peut prendre les *diamètres communs aux indicatrices* des deux surfaces (*loc. cit.*). Mais cela donne lieu, en général, à une épure compliquée et la méthode est peu pratique. Une autre méthode est celle du *cône d'erreur*. On appelle ainsi le cône qui a pour sommet le point double M et pour directrice la courbe d'intersection. Les deux tangentes cherchées sont évidemment situées sur ce cône. Comme elles sont, d'autre part, dans le plan tangent commun P, il suffit de prendre l'intersection de ce plan avec le cône d'erreur.

On sait (t. II, n° 379) que le degré du cône d'erreur est égal au degré de la courbe C diminué de deux unités. En particulier, si les surfaces proposées sont des quadriques, C est une biquadratique et le cône d'erreur est du second degré. Si l'on sait trouver un de ses plans cycliques, la construction précédente sera aisée.

II. *Les plans tangents* P *et* P_1 *sont verticaux*. — La tangente dans l'espace continue à être déterminée sans difficulté par l'une ou l'autre des méthodes indiquées plus haut; c'est évidemment la verticale du point M. La seule difficulté se présente en projection horizontale, parce qu'on se trouve dans le cas d'exception du théorème du n° 1.

Si le point M est à distance finie, la tangente *mt* à la projection horizontale est la trace du plan osculateur en M à C. On peut déterminer celui-ci en prenant *l'intersection des cercles de Meusnier*

des deux surfaces relatifs à la tangente commune verticale (t. II, n° 335). Ces deux cercles ont leur plan commun horizontal; ils se projettent donc en vraie grandeur et l'axe radical de ces projections est la tangente *mt*.

7. **Surfaces limites.** — Pour être certain que le point M décrit toute la courbe C, il faut faire balayer par la surface auxiliaire A tout l'espace contenant les deux surfaces proposées. Mais, il peut arriver que A ne rencontre pas C et, par conséquent, ne soit d'aucune utilité dans la détermination de l'intersection. Il est donc avantageux de connaître les surfaces auxiliaires particulières A_0, qui séparent les surfaces utiles des surfaces inutiles. Une telle surface A_0 est appelée *surface limite*. Elle est caractérisée par la condition d'être *tangente à la courbe* C, car de deux surfaces voisines A et A', prises de part et d'autre de A_0, l'une donne deux points de la courbe C très voisins du point de contact M_0 de A_0 et l'autre ne donne rien.

Un cas particulier est celui où A_0 est tangente en M_0 à l'une des surfaces proposées, par exemple à la surface S. On dit alors que A_0 est *limite pour* S.

Théorème (*dit des surfaces limites*). — *Si* A_0 *est limite pour* S, *son intersection avec* S_1 *est tangente à* C.

En effet, si l'on détermine les tangentes aux deux courbes par la méthode des plans tangents, on aboutit à la même droite, puisque les plans tangents en M_0 à A_0 et à S sont les mêmes.

Il est généralement difficile de déterminer les surfaces limites. Un cas particulier où cela est possible est celui où l'on peut trouver une surface A_0 circonscrite à S le long d'une ligne γ. En tout point de rencontre de cette ligne avec S_1, A_0 est évidemment limite pour S (¹).

8. **Points remarquables.** — On appelle ainsi des points de l'intersection, auxquels on impose une certaine propriété caractéristique et qui jouent un rôle plus ou moins important dans l'exécution de l'épure ou dans la présentation finale du résultat. Les points remar-

(¹) Il ne suffit pas de prendre la surface A_0 tangente à S pour pouvoir affirmer qu'elle est surface limite; il faut, en outre, que son point de contact soit sur S_1.

quables que l'on cherche habituellement dans une intersection sont les suivants :

1° *Points limites.* — Ce sont les points fournis par les surfaces limites. Ils ne sont pas utiles pour la représentation de l'intersection et leur recherche n'est justifiée que par l'importance des surfaces limites (n° 7).

2° *Points sur les contours apparents.* — Les points de l'intersection situés sur les contours apparents horizontaux et verticaux des deux surfaces sont très importants au point de vue de la ponctuation, car ils séparent les parties vues des parties cachées. D'après le théorème II du n° 2, en un point du contour apparent horizontal de S, par exemple, la projection horizontale de l'intersection est tangente à ce contour apparent.

Il n'existe pas de méthode générale simple pour trouver les points sur les contours apparents. Supposons, par exemple, qu'on veuille les points sur le contour apparent horizontal H de S. On tâche de trouver une surface contenant le contour apparent H dans l'espace et coupant S_1 suivant une courbe simple. En prenant l'intersection de cette dernière avec H, on obtient les points cherchés, dont on ne marque, bien entendu, que la projection horizontale.

Si l'on n'aperçoit pas la surface auxiliaire désirée, on a toujours la ressource de couper par le cylindre projetant verticalement H. Autrement dit, on prend l'intersection des projections verticales de H et de C et l'on rappelle les points obtenus sur la projection horizontale de H. Cela est plus précis que de chercher directement les points de contact des deux projections horizontales, car le point de contact de deux courbes tangentes est toujours graphiquement très mal déterminé. Ce procédé offre toutefois l'inconvénient d'exiger la construction de la projection verticale de H qui, par ailleurs, ne présente aucune utilité.

3° *Points doubles.* — Il y a des points doubles lorsque les surfaces proposées sont tangentes ou lorsque l'une d'elles présente un point double situé sur l'autre. Quand on a obtenu un tel point, il est bon de chercher ses tangentes. Dans le cas des surfaces tangentes, on applique l'une des méthodes indiquées au n° 6. Dans le cas

où le point est un point conique de S, par exemple, on prend l'intersection du cône des tangentes avec le plan tangent à S_1.

Points doubles apparents. — Dans les deux cas envisagés ci-dessus, on a affaire à un véritable point double dans l'espace, qui donne un point double dans chaque projection. Il peut arriver aussi qu'on ait, par exemple, un *point double apparent en projection horizontale*, qui ne soit pas la projection d'un véritable point double de l'espace. Ceci a lieu lorsque deux points P et Q de la courbe C se projettent horizontalement en un même point *m*, c'est-à-dire lorsqu'ils se trouvent sur une même verticale. Les deux branches de la courbe C qui passent respectivement par P et par Q donnent, en projection horizontale, deux branches qui se coupent en *m*, ce qui constitue évidemment un point double. *Il n'y a aucune difficulté à obtenir les tangentes* en un tel point, car il suffit de construire successivement les projections horizontales des tangentes en P et en Q à la courbe C de l'espace. Ce qui est plus difficile, c'est d'obtenir les points doubles eux-mêmes.

On peut quelquefois construire assez facilement une ligne, appelée *ligne des points doubles*, sur laquelle on est assuré que se trouvent ces points. Voici, par exemple, comment on définit la ligne des points doubles *en projection horizontale*. On remarque que le milieu de PQ appartient à la fois aux surfaces diamétrales conjuguées des cordes verticales par rapport aux deux surfaces proposées. L'intersection D de ces deux surfaces diamétrales se projette horizontalement suivant une ligne *d*, qui passe évidemment par *m*. C'est cette ligne *d* qui constitue la ligne des points doubles en projection horizontale. En prenant son intersection avec la projection horizontale de C, on obtient les points doubles eux-mêmes.

Dans le cas particulier où les surfaces S *et* S_1 *sont des quadriques*, les surfaces diamétrales sont des plans (t. II, n° 463); donc, *la ligne des points doubles est une droite.*

4° *Points les plus hauts et les plus bas, les plus à droite et les plus à gauche.* — Les points les plus hauts et les plus bas de la projection horizontale, par exemple, sont ceux où la tangente est parallèle à la ligne de terre. Dans l'espace, la tangente doit être de front. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les plans tangents aux surfaces aient leurs frontales parallèles, ce que l'on reconnaît à ce que les traces verticales sont parallèles.

Les points les plus à droite et les plus à gauche des deux projections sont caractérisés par la condition d'avoir une tangente perpendiculaire à la ligne de terre. Dans l'espace, en un tel point, la tangente est de profil. On peut dire aussi que le plan des normales doit être parallèle à la ligne de terre.

Ces points et les précédents sont intéressants en ce qu'ils limitent la courbe dans deux directions particulières de l'épure. Mais, leur importance n'est toutefois pas très grande. Au surplus, ils sont souvent très difficiles à déterminer.

9. **Branches infinies.** — A la liste des points remarquables, il convient d'ajouter *les points à l'infini de l'intersection*. La construction des branches infinies et des asymptotes correspondantes présente évidemment une importance capitale, au point de vue de la forme de la courbe.

Pour avoir les directions asymptotiques, on prend *l'intersection des cônes des directions asymptotiques des deux surfaces* (t. II, n° 239) *en donnant à ces cônes le même sommet*. Chaque génératrice commune G est une direction asymptotique. *Pour avoir l'asymptote correspondante*, on applique la méthode des plans tangents (n° 6), c'est-à-dire qu'*on prend l'intersection des plans asymptotes* aux deux surfaces correspondant à la direction G. On peut quelquefois simplifier cette dernière construction, en remplaçant les surfaces proposées par des surfaces plus simples qui leur sont asymptotes, c'est-à-dire tangentes tout le long de la courbe de l'infini. Il en est ainsi, en particulier, *lorsque les surfaces données sont des quadriques; on peut remplacer chacune d'elles par son cône asymptote*.

10. **Branches virtuelles.** — Supposons que les deux surfaces proposées aient un *plan de symétrie horizontal commun* H. Ce sera évidemment un plan de symétrie pour la courbe C. Deux points symétriques M et M' se projettent horizontalement au même point *m*. Tous les points de la projection horizontale doivent donc être considérés comme des points doubles apparents (n° 8).

Si le point M est imaginaire, le point M' est imaginaire conjugué et la droite qui les joint est réelle (t. II, n° 74). La trace de cette droite sur le plan horizontal, c'est-à-dire le point *m*, est également réelle. On voit donc qu'il peut exister des points réels de la projection horizontale ne correspondant à aucun point réel de la courbe de l'espace. Ces points constituent ce qu'on appelle des *branches virtuelles*. Ces branches ne doivent évidemment pas figurer dans l'épure terminée. Néanmoins, il peut être utile de les tracer au crayon, tout au moins en partie, afin de mieux guider les extrémités

des branches réelles. En outre, il arrive que la projection horizontale complète est une conique (si la courbe dans l'espace est du quatrième degré). Dans ce cas, il y a lieu de déterminer les éléments de cette conique, parce qu'ils permettent facilement son tracé; et alors, on ne distingue pas, pour cette détermination, les branches virtuelles des branches réelles. En particulier, il est utile de savoir déterminer les *asymptotes des branches virtuelles*, auxquelles la méthode générale précédente ne s'applique pas, puisque les directions asymptotiques correspondantes de l'espace sont imaginaires. Voici la méthode qu'on peut alors appliquer.

Soit une direction asymptotique d d'une branche virtuelle. Tout plan vertical V, dont la trace horizontale δ est parallèle à d, coupe la courbe C en deux points à l'infini imaginaires conjugués. Pour que δ soit une asymptote, il faut et il suffit que V coupe C en quatre points à l'infini deux à deux imaginaires conjugués. On est donc ramené à trouver des plans verticaux coupant S et S_1 suivant des courbes ayant en commun deux ou quatre points à l'infini. Bornons-nous à indiquer la solution dans le *cas de deux quadriques*.

Pour avoir les directions asymptotiques, il faut chercher les plans verticaux V coupant les deux surfaces suivant deux coniques ayant mêmes points à l'infini, c'est-à-dire *suivant des coniques homothétiques* (t. II, n° 409). A cet effet, on peut remplacer chaque surface par une quadrique homothétique, par exemple par son cône des directions asymptotiques, lorsqu'il est réel. Pour mettre en évidence les deux plans cherchés, *on circonscrit ces deux quadriques* S′ *et* S'_1 *homothétiques aux proposées à une troisième quadrique* Q. Elles se coupent alors suivant deux coniques (t. II, n° 492), dont les plans sont les plans V cherchés. On peut aisément démontrer que la quadrique Q existe toujours, en vertu de l'existence du plan de symétrie commun H. Quant à sa construction, elle n'est simple que dans le cas où les quadriques données sont de révolution ; on peut alors prendre pour Q une sphère quelconque inscrite, par exemple, à S. Nous reviendrons, avec plus de détails, sur ce cas, au Chapitre V.

Une fois qu'on a obtenu une direction asymptotique d, pour avoir l'asymptote correspondante δ, il faut chercher un plan V parallèle à d, coupant S et S_1 suivant deux coniques ayant leurs quatre points d'intersection à l'infini, c'est-à-dire *suivant deux coniques homothétiques et concentriques*. A cet effet, on trace les deux diamètres conjugués du plan vertical passant par d, par rapport aux deux quadriques proposées. Ces deux diamètres se rencontrent en un certain point O (car ils sont tous deux dans le plan H, qui est diamétral conjugué des cordes verticales ; *cf.* t. II, n° 464). Le plan V passant par ce point répond évidemment à la question, de sorte *qu'on a l'asymptote cherchée en menant une parallèle à d par la projection horizontale de* O.

11. **Ponctuation.** — Supposons que les surfaces S et S_1 limitent respectivement deux corps solides opaques [1]. Leur intersection étant supposée construite, on peut représenter l'une ou l'autre des trois combinaisons suivantes :

I. *Ensemble des deux solides.* — Voici les règles à suivre pour faire la ponctuation.

a. On ponctue les contours apparents des deux surfaces, ainsi que l'intersection C, en ne regardant comme vus que les points qui sont vus à la fois sur les deux surfaces.

b. On enlève [2] *les parties des contours apparents de chaque surface qui sont intérieures au corps solide limité par l'autre surface.*

II. *Partie de S extérieure à S_1. — a. On ponctue les contours apparents des deux surfaces, ainsi que l'intersection C, en ne s'occupant, pour la visibilité, que de S ; c'est-à-dire qu'un point est vu s'il est vu sur cette surface, quand bien même il serait caché sur S_1.*

b. On enlève les parties des contours apparents de S intérieures au corps solide limité par S_1, ainsi que les parties des contours apparents de S_1 extérieures au corps solide limité par S.

c. On trace en trait plein certaines fractions de lignes, qui étaient primitivement cachées sur S, mais qui font maintenant partie du contour apparent, au titre de lignes d'arrêt (n° 3), *par suite de la suppression de certaines parties de S.*

III. *Solide commun. — a. On ponctue les contours apparents des deux surfaces, ainsi que l'intersection C, en regardant comme vu tout point qui est vu sur l'une ou l'autre des deux surfaces.*

b. On enlève les parties des contours apparents de chaque surface extérieures au corps solide limité par l'autre.

c. On trace en trait plein certaines fractions de lignes qui

---

(1) C'est la convention habituellement adoptée. On peut aussi supposer que les deux surfaces sont réalisées matériellement, avec une épaisseur infiniment petite, en les considérant, en outre, soit comme opaques, soit comme transparentes.

(2) On les trace habituellement en trait mixte fin

devienneni vues, comme faisant partie du nouveau contour apparent, ainsi qu'il a été expliqué pour le cas II.

Dans l'application pratique de ces règles, il est nécessaire d'esquisser la ponctuation au crayon, avant la mise à l'encre définitive, à cause de la règle *c* des cas II et III. Si l'on ne prend pas cette précaution, on s'expose à tracer en pointillé des portions de lignes qu'il faut ensuite tracer en trait plein. D'ailleurs, la ponctuation est toujours une opération assez délicate, pour qu'il ne soit pas inutile de l'arrêter avec soin au crayon, avant de la passer définitivement à l'encre.

Les règles que nous venons de donner ont simplement pour but de faciliter la besogne. Elles peuvent être inutiles pour ceux qui voient aisément dans l'espace et qui peuvent se figurer tout de suite l'aspect définitif de la combinaison de corps solides qu'il s'agit de représenter. Mais, pour cela, il faut avoir une grande imagination visuelle; aussi, croyons-nous qu'il est toujours prudent d'appliquer les règles, sauf si l'épure est excessivement simple.

CHAPITRE II.

POLYÈDRES, PRISMES ET PYRAMIDES.

12. **Polyèdres.** — Un polyèdre se représente par les projections de ses arêtes.

Dans le cas d'un *polyèdre convexe*, la ponctuation des arêtes, ainsi que de toute figure tracée sur la surface, est facilitée par les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si un point* M *intérieur à une face* F *est vu ou caché, il en est de même pour tous les points de cette face, sauf peut-être pour certains points du périmètre.*

En effet, remarquons d'abord qu'en vertu de la convexité du polyèdre, toute demi-droite qui en sort n'y rentre jamais. Il en résulte que si un point M de la surface est caché, en projection horizontale par exemple, le point M′ situé à une distance infiniment petite au-dessus de lui est intérieur au polyèdre, car, s'il ne l'était pas, la demi-verticale ascendante issue de M serait tout entière extérieure et le point M serait vu.

Cela posé, prenons, à l'intérieur de F, une aire A comprenant M et dont le périmètre P soit très voisin du périmètre Q de F, *tout en n'ayant avec lui aucun point commun*. Prenons ensuite, à la distance ε au-dessus de A et de M, l'aire A′ et le point M′. Si ε est assez petit, l'aire A′ est tout entière intérieure ou tout entière extérieure au polyèdre, car, si le plan de A′ rencontre la surface du polyèdre, ce ne peut être que suivant une ligne L qui tend vers Q, quand ε tend vers zéro et qui finit, par conséquent, par envelopper complètement A′.

Dès lors, si M est caché, M′ est intérieur au polyèdre et, par suite, aussi toute l'aire A′; d'où il résulte que toute l'aire A est cachée. Si, au contraire, M est vu, M′ est extérieur au polyèdre, donc aussi A′ et toute l'aire A est vue.

Notre raisonnement est valable si voisin que P soit de Q, pourvu qu'il n'ait avec lui aucun point commun. Donc, toute la face F est vue ou cachée en même temps que M, à l'exception peut-être de certaines parties de Q.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Si un point* N *du périmètre* Q *est caché, il en est de même de* F.

En effet, nous pouvons trouver, au-dessus de N, un point N′ intérieur au polyèdre. Tout autour de ce point, nous pouvons prendre une petite aire horizontale a intérieure, elle aussi, au polyèdre. Nous pouvons ensuite choisir, *à l'intérieur* de F, un point M qui soit au-dessous d'un point de a et qui soit, par conséquent, caché. Nous sommes, dès lors, ramenés au théorème I.

Théorème III. — *Si un point* N *du périmètre* Q *est vu et ne fait pas partie du contour apparent, la face* F *est vue.*

En effet, reprenons la démonstration précédente, en supposant, cette fois, l'aire a extérieure et, en outre, ce qui est permis en vertu de la convexité du polyèdre, à une distance infiniment petite au-dessus de N. Si F était cachée, on pourrait y prendre un point M caché et au-dessous d'un point M′ de a. Comme M′ est extérieur au polyèdre, la verticale MM′ sortirait nécessairement du solide en un point M″ compris entre M et M′ et, par suite, infiniment voisin de M. Comme on peut supposer M aussi voisin qu'on le veut de N, on voit que la corde MM′ tendrait vers zéro, quand M tendrait vers N. Ce dernier point appartiendrait donc bien au contour apparent. C. Q. F. D.

13. **Intersection d'une droite et d'un polyèdre.** — On cherche successivement les intersections de la droite avec toutes les faces du polyèdre, problème élémentaire que l'on sait résoudre, en coupant, par exemple, par un plan auxiliaire quelconque contenant la droite. Si le polyèdre est convexe, le nombre des points d'intersection est égal à zéro ou à deux.

Pour ponctuer, on représente, par exemple, la partie de la droite extérieure au polyèdre. A cet effet, on enlève tous les segments intérieurs au polyèdre ([1]). Puis, on ponctue tous les segments restants, en remarquant que, pour chacun d'eux, la ponctuation ne peut changer qu'en traversant une arête de contour apparent ; de sorte qu'il suffit, pour être fixé, de prendre un point quelconque du segment et de rechercher s'il est vu ou caché ([2]).

14. **Intersection de deux polyèdres.** — Pour trouver l'intersection de deux polyèdres P et P_1, on peut chercher les *intersections des*

([1]) C'est-à-dire qu'on les trace en trait mixte (n° 11).

([2]) Pour cela, on coupe le polyèdre par la verticale du point et l'on regarde si celui-ci se trouve au-dessus de tous les points d'intersection, auquel cas il est vu.

faces de l'un avec les faces de l'autre ou bien chercher les *points de rencontre des arêtes de* P *avec les faces de* P_1 *et des arêtes de* P_1 *avec les faces de* P. La première méthode est généralement plus simple, parce que le nombre des faces est inférieur au nombre des arêtes. Quelle que soit la méthode adoptée, il faut bien prendre garde de n'oublier aucune des combinaisons de faces ou bien de faces et d'arêtes susceptibles de donner quelque chose dans l'intersection. A cet effet, il est bon de préparer un tableau où figurent toutes les combinaisons de faces, par exemple. Puis, on marque du signe — toutes celles qui ne donnent rien [1], en indiquant, pour les autres, les segments obtenus, au fur et à mesure qu'ils sont construits.

Jonction des points. — L'intersection est constituée par une ou plusieurs lignes brisées, dont les côtés sont donnés par la première des méthodes ci-dessus et les sommets par la seconde. La limitation des côtés et la jonction des sommets exigent une assez grande attention et doivent être effectuées avec méthode. En particulier, si l'on a seulement déterminé les sommets, il faut prendre garde de ne pas joindre deux sommets non consécutifs, c'est-à-dire situés dans deux faces différentes de l'un des polyèdres, en dehors de l'arête intersection de ces faces.

Pour être sûr de ne pas se tromper, on peut suivre la marche suivante : On part de l'intersection D d'une face F de P avec une face F_1 de P_1. On y prend un point M, qui soit intérieur à la fois aux deux faces. Puis, partant de ce point, on suit la droite D jusqu'à ce qu'on rencontre une arête A appartenant à l'une des deux faces, soit, par exemple, à F. A partir de ce moment, on quitte la face F, pour passer sur la face consécutive F' de P, tout en restant sur la face F_1. On suit alors l'intersection de ces deux faces, jusqu'à ce qu'on rencontre une nouvelle arête et ainsi de suite. On continue de la sorte jusqu'à ce qu'on ait suivi tous les côtés ou passé par tous les sommets.

Il peut se faire, toutefois, que le polygone se ferme avant qu'on soit arrivé à ce résultat. Dans ce cas, on recommence, en partant d'un des côtés restants et ainsi de suite jusqu'à épuisement complet de tous les côtés et sommets.

---

(1) On peut marquer, *a priori*, du signe — toute combinaison de deux faces *qui n'ont aucun point commun dans l'une au moins des deux projections.*

Une autre circonstance particulière qui peut se présenter est celle où le côté D sort simultanément de F et de F_1, en un point N appartenant à une arête A de P et à une arête A_1 de P_1. Il y a alors quatre côtés qui partent de ce point, à savoir les intersections des deux faces F et F′ adjacentes à A avec les deux faces F_1 et F'_1 adjacentes à A_1. Le premier, D, est seul tracé, de sorte qu'on peut continuer le parcours du polygone en suivant indifféremment l'un ou l'autre des trois autres côtés, c'est-à dire en quittant l'une ou l'autre des faces F, F_1 ou en les quittant toutes deux. Quelle que soit la combinaison adoptée, les deux côtés restants sont parcourus, cette fois sans ambiguïté, à un deuxième passage au point N.

Ponctuation. — On commence par déterminer séparément, pour chaque polyèdre, la liste des faces vues dans chaque projection. Puis, on suit les règles du n° 11.

15. **Prismes et pyramides.** — Les prismes et pyramides sont des polyèdres ; on peut donc leur appliquer tout ce qui vient d'être dit dans ce Chapitre. En particulier, on peut appliquer à une pyramide les théorèmes I et II du n° 12, toutes les fois que la base est un polygone convexe, mais à condition toutefois de ne considérer qu'une nappe de la pyramide, c'est-à-dire de ne pas prolonger les arêtes de l'autre côté du sommet. Cette restriction est évidemment inutile dans le cas d'un prisme.

Pour les problèmes d'intersection, tout en restant dans le cadre des généralités précédemment développées, il y a lieu de signaler les méthodes particulières suivantes.

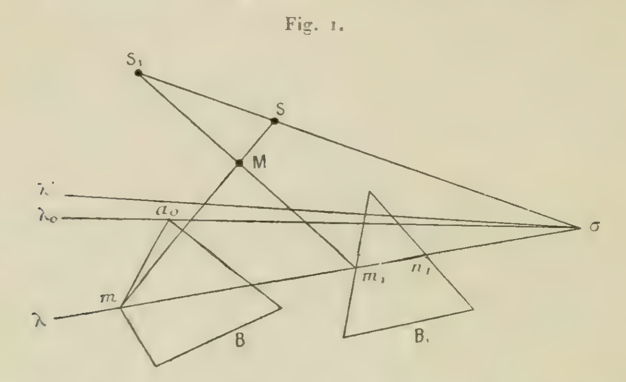
Pour trouver l'*intersection d'une droite et d'une pyramide*, on coupe par un *plan auxiliaire contenant la droite et le sommet* S de la pyramide. (Si l'on a affaire à un prisme, on le considère comme une pyramide dont le sommet est à l'infini, c'est-à-dire que le plan auxiliaire doit être parallèle aux génératrices du prisme.) Ce plan coupe le polygone de base en des points que l'on joint à S. Les droites obtenues coupent la droite donnée aux points cherchés.

16. **Intersection de deux pyramides.** — Soient deux pyramides P et P_1, de sommets S et S_1 et de bases B et B_1. Pour construire leur intersection, on emploie la seconde des méthodes indiquées au n° 14, c'est-à-dire qu'on cherche les points de rencontre des arêtes de chaque pyramide avec les faces de l'autre.

A cet effet, *on coupe les deux pyramides par une série de plans*

auxiliaires A, *passant tous par la ligne des sommets* SS_1 *et menés successivement par toutes les arêtes des deux pyramides.* Supposons, par exemple, que le plan A soit mené par l'arête Sm de P. Il coupe la base B_1 en un certain nombre de points m_1, n_1, etc. Joignons ces points au sommet S_1 ; nous obtenons des droites qui rencontrent Sm en autant de points qui sont des sommets de la ligne polygonale d'intersection (*fig.* 1).

Fig. 1.



Remarque I. — Cette méthode est, en somme, la méthode générale des surfaces auxiliaires exposée au n° 6.

Remarque II. — On peut dire qu'on a cherché l'intersection de la droite Sm avec P_1, en suivant la méthode indiquée au numéro précédent.

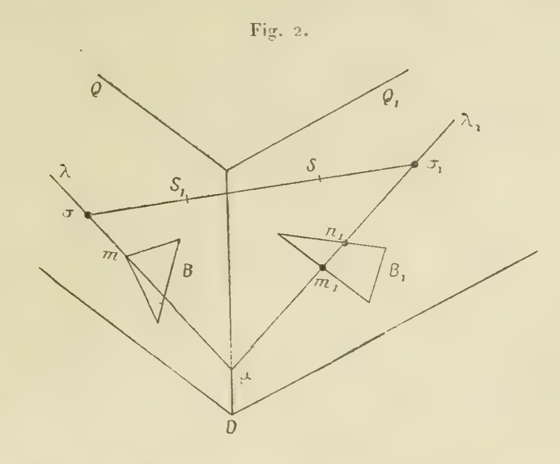
Remarque III. — Si, comme il arrive fréquemment, les bases des deux pyramides sont données dans un même plan Q, *la trace* $\sigma\lambda$ *du plan auxiliaire* A *sur ce plan passe par un point fixe* σ, *trace de la ligne des sommets.*

Si les bases sont dans des plans différents Q et Q_1, ils sont percés par la ligne des sommets en *deux points* σ *et* σ_1, *par lesquels passent respectivement les traces de* A *sur* Q *et sur* Q_1. Les traces homologues $\sigma\lambda$ et $\sigma_1\lambda_1$ *se rencontrent en un point variable* μ *de l'intersection* D *des plans* Q *et* Q_1 (*fig.* 2).

Remarque IV. — Si P_1 est un prisme, S_1 est à l'infini ; la ligne des sommets est la *parallèle aux arêtes du prisme menée par le sommet de la pyramide.*

Si P et P_1 sont des prismes, la ligne des sommets est rejetée à l'infini ; *les plans auxiliaires sont parallèles aux arêtes des deux prismes*. Leurs traces sur le plan de base Q, par exemple, sont parallèles à une direction fixe δ, obtenue en menant par un point quelconque de l'espace des parallèles aux arêtes des deux prismes et joignant les traces de ces parallèles sur le plan Q.

Fig. 2.

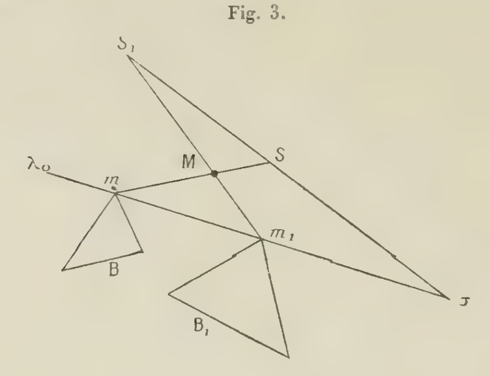


17. **Plans limites.** — Pour plus de simplicité, supposons que les deux bases soient dans un même plan Q. Pour qu'un plan auxiliaire Λ donne quelque chose dans l'intersection, il faut et il suffit que sa trace $\sigma\lambda$ sur Q coupe à la fois les deux bases B et B_1. Dès lors, la trace $\sigma\lambda_0$ d'un plan limite est caractérisée par la condition qu'*on peut trouver une droite infiniment voisine $\sigma\lambda'$ passant par σ et ne coupant plus l'une des bases*, tandis que $\sigma\lambda_0$ continue à les couper toutes deux (*fig.* 1). La base qui cesse d'être coupée par $\sigma\lambda'$ a nécessairement un sommet a_0 sur $\sigma\lambda_0$. On dit que le plan $\sigma\lambda_0$ est *limite pour la pyramide correspondante* (*cf.* n° 7). Il peut arriver qu'un plan soit *limite à la fois pour les deux pyramides*. Dans ce cas, $\sigma\lambda_0$ passe à la fois par un sommet de B et par un sommet de B_1. *Les arêtes qui aboutissent à ces deux sommets se rencontrent* (*fig.* 3).

Il est toujours très facile d'obtenir les plans limites. Il suffit de faire tourner une droite, d'une manière continue, autour du point σ.

Dès qu'elle cesse de rencontrer une des bases, elle donne une trace de plan limite.

Fig. 3.



Dans le cas où les plans de base sont différents, on procède d'une manière analogue, au moyen des traces $\lambda\sigma\mu$ et $\lambda_1\sigma_1\mu$.

18. **Jonction des points.** — Quand on a obtenu tous les sommets du polygone d'intersection, on effectue leur jonction systématique de la manière suivante.

On part de l'un quelconque d'entre eux M. On prend les points correspondants m et m_1 des deux bases. Puis, on fait parcourir par ceux-ci leurs polygones de bases respectifs, en les assujettissant à se trouver constamment dans un même plan auxiliaire, c'est-à-dire sur une même trace $\sigma\lambda$ ou sur des traces homologues $\sigma\lambda\mu$, $\sigma_1\lambda_1\mu$. Chaque fois que l'un d'eux passe par un sommet de la base qu'il décrit, on trouve, sur l'arête aboutissant à ce sommet, un sommet du polygone d'intersection ; on le numérote, en faisant succéder les numéros consécutifs dans l'ordre naturel.

Lorsque le point m, par exemple, arrive à un plan qui est limite pour P_1 et non pour P, il doit rebrousser chemin sur la base B, le point m_1 continuant à parcourir B_1 dans le même sens. Si le plan est limite à la fois pour P et pour P_1, il y a trois manières de continuer la jonction : on peut faire rebrousser chemin à m, ou bien à m_1, ou bien à ni l'un ni l'autre. (On se trouve alors dans le cas de rencontre de deux arêtes signalé au n° 14.)

Quand on retombe sur le point M de départ, cela indique la fermeture du polygone. En général, si l'on veut continuer le parcours, on

décrit nécessairement le polygone déjà parcouru. Dans ce cas, s'il reste des points non numérotés, on prend l'un quelconque d'entre eux comme nouveau point de départ et l'on recommence ainsi jusqu'à épuisement complet de tous les points.

Il peut arriver qu'en retombant sur le point M de départ, on puisse continuer le parcours, sans retrouver des sommets déjà numérotés de l'intersection. Cela indique que le point M est un point de rencontre de deux arêtes, c'est-à-dire que le plan auxiliaire correspondant est limite à la fois pour les deux pyramides. Quatre côtés sont issus de ce point ; deux d'entre eux viennent d'être parcourus, on s'engage sur l'un quelconque des deux qui restent et, lorsqu'on revient de nouveau au point M, c'est en parcourant le quatrième côté. A ce moment-là, le polygone est définitivement fermé et, s'il reste des sommets non numérotés, il faut prendre l'un d'eux comme nouveau point de départ, ainsi qu'il a été expliqué précédemment.

Quand tous les sommets sont numérotés, on les joint dans l'ordre des numéros.

19. **Pénétration et arrachement.** — Supposons les *deux bases convexes*. On dit qu'il y a *arrachement* lorsque l'intersection ne comprend qu'un seul polygone. On dit, au contraire, qu'il y a *pénétration* lorsqu'elle se compose de deux polygones fermés. Dans ce dernier cas, il y a une des pyramides, P par exemple, qui pénètre dans l'autre, en y faisant un trou, dont les deux polygones bordent les deux ouvertures. Chaque arête de P rencontre chaque polygone en un seul point ; au contraire, chaque arête de P_1 rencontre un seul des deux polygones en deux points ou bien ne les rencontre ni l'un ni l'autre.

On peut donner des règles permettant de reconnaître, *a priori*, par la disposition des plans limites, dans quel cas on se trouve. Mais, cela n'a pas un grand intérêt pratique, car on s'en aperçoit toujours, en faisant la jonction des points.

20. **Ombres.** — Quand un polyèdre *convexe* est éclairé par une source lumineuse L, chacune de ses faces F est *ou bien totalement éclairée ou bien totalement dans l'ombre*, sauf peut-être les arêtes qui la limitent. Cela résulte du théorème I du n° 12, qui s'applique évidemment pour une projection conique.

De même, en vertu du théorème II, *si un point du périmètre de F est dans l'ombre, il en est de même de toute cette face*. En vertu du théorème III, *si un point du périmètre est éclairé et n'appartient pas à la ligne d'ombre propre, toute la face est éclairée*.

La *ligne d'ombre propre* est constituée par l'ensemble des arêtes qui séparent les faces éclairées des faces dans l'ombre.

Le *cône d'ombre* est une pyramide ayant pour sommet L et s'appuyant sur la ligne d'ombre. En prenant sa trace sur un plan, on a l'ombre portée par le polyèdre sur ce plan. En prenant son intersection avec un autre polyèdre, on a l'ombre portée par le premier sur le second. Si l'ombre est au soleil, la pyramide est un prisme.

CHAPITRE III.

CÔNES ET CYLINDRES.

21. Point courant et plan tangent en ce point. — Un cône est habituellement défini par son *sommet* S et par une *courbe directrice* C ou par une *surface inscrite* Σ. Lorsque la courbe C est plane, elle porte plus spécialement le nom de *base*.

Pour trouver un point quelconque, on prend une génératrice quelconque G, obtenue en joignant S à un point quelconque N de C ou en menant par S une tangente quelconque à Σ. Puis, on prend, sur G, un point quelconque M. Pour avoir le plan tangent en ce point, on se rappelle qu'il est le même tout du long de G et l'on prend le plan tangent à Σ en son point de contact avec G, ou bien le plan tangent en N, lequel est déterminé par la tangente en N à C et la droite G (¹).

22. Problèmes sur les plans tangents. — Problème I. — *Mener les plans tangents à un cône par un point donné* P.

Tout plan tangent passant par le sommet, on est ramené à *mener par* SP *les plans tangents à* C *ou à* Σ. Bornons-nous à indiquer la construction dans le *cas de la base plane*.

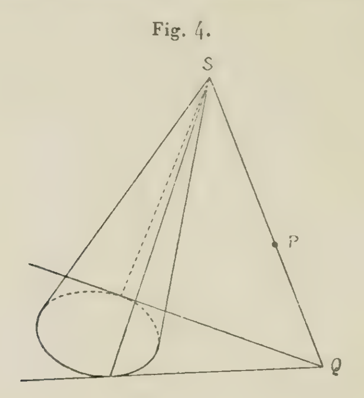
On prend la trace Q de SP sur le plan de base; puis, on mène, par ce point, les tangentes à la base. Chacune de ces tangentes détermine, avec la génératrice aboutissant à son point de contact, un des plans tangents cherchés.

Lorsque le point P est à l'infini, le problème consiste à mener les *plans tangents parallèles à une droite donnée*. La solution précédente n'est nullement modifiée.

(¹) Cette construction est en défaut lorsque les deux droites sont confondues. Le plan tangent est alors le plan osculateur en N à C. (*Cf.*, n° 1.)

Lorsque le point S est à l'infini, le cône devient un *cylindre*. La solution générale convient toujours. Signalons seulement que, si P est en même temps à l'infini, c'est-à-dire s'il s'agit de *mener au*

Fig. 4.



cylindre les plans tangents parallèles à une droite D, on mène, par un point quelconque de l'espace, une parallèle à cette droite et une parallèle aux génératrices du cylindre; on prend la trace de leur plan sur le plan de base et l'on mène des tangentes à la base parallèles à cette trace.

23. **Applications**. — I. *Contours apparents*. — Pour avoir le contour apparent horizontal, il faut *chercher les plans tangents verticaux* (n° 4). Leurs génératrices de contact constituent le contour apparent dans l'espace et les projections horizontales de ces génératrices constituent le contour apparent en projection.

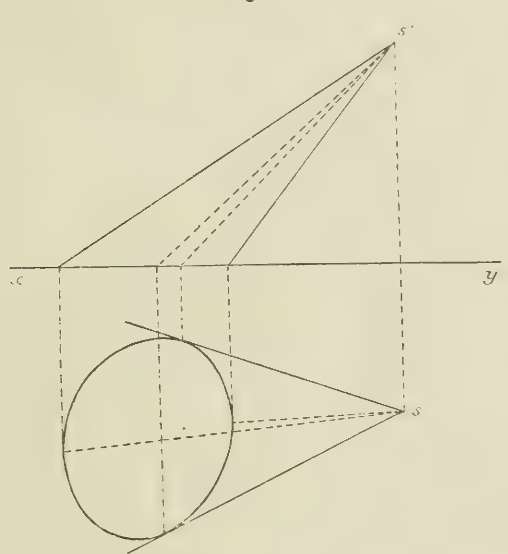
D'après la solution précédente, on doit mener la verticale qui passe par le sommet S, prendre sa trace sur le plan de base et, par cette trace, mener les tangentes à la base. Les génératrices aboutissant aux points de contact sont les génératrices de contour apparent. Si le plan de base n'est pas vertical, les projections horizontales de ces génératrices coïncident évidemment avec les projections des tangentes ci-dessus, c'est-à-dire avec les *tangentes à la projection horizontale de la base menées par la projection horizontale du sommet*. Ceci est d'ailleurs une conséquence du théorème II du n° 2. Ledit théorème prouve aussi que la même construction s'applique dans le cas où la directrice C n'est pas plane.

Si la courbe C est dans un plan vertical, on doit lui mener des tangentes verticales, ce qui se fait au moyen de la projection verticale. Puis, on joint toujours les points de contact au sommet. Si le cône est défini par une surface inscrite Σ, on mène, par la projection horizontale s du sommet, les *tangentes au contour apparent horizontal de* Σ, conformément au théorème III, du n° 2.

Tout ce que nous venons de dire pour le contour apparent horizontal se répète pour le contour apparent vertical, en échangeant simplement les rôles du plan horizontal et du plan vertical.

Sur la figure 5, nous avons indiqué la construction des contours

Fig. 5.



apparents d'un cône, dont la base est dans le plan horizontal. Nous avons tracé en pointillé la projection verticale du contour apparent horizontal et la projection horizontale du contour apparent vertical.

II. *Ombres.* — Si le point P envisagé plus haut est une source lumineuse, les génératrices de contact des plans tangents sont les *génératrices d'ombre propre*. Les traces des plans tangents sur un des plans de projection délimitent l'*ombre portée* sur ce plan, qui est donc constituée par un angle ayant pour sommet la trace de la droite SP.

24. Problème II. — *Reconnaître si deux cônes ont un plan tangent commun et trouver ce plan.* — Si deux cônes, de sommets S et S_1, ont un plan tangent commun Q, ce plan doit passer par chacun des sommets. On est ainsi conduit à *mener à l'un des cônes les plans tangents qui passent par le sommet de l'autre.* En général, aucun de ces plans n'est tangent, en même temps, au deuxième cône, de sorte que le problème ne comporte pas de solution. Quoi qu'il en soit, il est toujours facile de reconnaître si cette solution existe, puisque nous savons résoudre le problème I. En particulier, si les deux cônes ont leurs bases dans un même plan, il suffit de voir si l'on peut mener, par la trace de SS_1 sur ce plan, une tangente commune aux deux bases.

Signalons quelques cas particuliers évidents où le problème est certainement possible.

1° *Les deux cônes ont même sommet.* — Il suffit de prendre leurs bases dans un même plan et de mener les tangentes communes à ces deux bases. Chacune d'elles détermine, avec le sommet commun, un des plans demandés.

2° *Les deux cônes ont même courbe directrice ou même surface inscrite.* — Il suffit de mener, par la ligne des sommets, les plans tangents à cette ligne ou à cette surface.

3° *Les deux cônes sont homothétiques.* — Ce cas rentre dans le précédent, car les deux cônes ont même base dans le plan de l'infini (t. II, n° 407). Si l'on prend leurs bases dans un même plan, on obtient deux courbes homothétiques par rapport à la trace de la ligne des sommets. Toute tangente menée par cette trace à l'une des bases est aussi tangente à l'autre base et détermine, avec la ligne des sommets, un plan tangent commun.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner les cas particuliers où l'un des cônes ou les deux deviennent des cylindres.

Problème III. — *Mener à deux cônes des plans tangents parallèles.* — Soient les deux cônes C et C_1, de sommets S et S_1 et soient P et P_1 deux plans parallèles qui leur sont respectivement tangents. Menons le cône C' homothétique de C et de sommet S_1. Celui de ses plans tangents qui est homologue de P n'est autre que P_1. On aura donc ce dernier plan en menant les plans tangents communs aux cônes C_1 et C', qui ont même sommet. On est ramené au problème II, cas 1°.

Si l'un des cônes, C par exemple, devient un cylindre, la construction précédente ne s'applique pas. Mais, on est alors ramené à *mener au cône un plan tangent parallèle aux génératrices du cylindre.*

Si les deux cônes sont des cylindres, on doit mener à chacun d'eux des plans tangents parallèles aux génératrices de l'autre.

Problème IV. — *Mener une normale commune à deux cônes.* — Il suffit de leur mener deux plans tangents parallèles, puis de mener la perpendiculaire commune aux deux génératrices de contact.

25. Intersection d'un cône avec une droite. — *On coupe le cône par le plan déterminé par la droite* D *et le sommet* S *du cône* (*cf.* n° 15 et t. II, n° 379). Puis, on prend les points de rencontre de D avec les génératrices d'intersection.

Pour construire pratiquement ces dernières, dans le cas où l'on connaît une directrice C, on cherche les points de rencontre de cette ligne avec le plan auxiliaire et l'on joint ces points à S. En particulier, si C est une base, on prend ses points de rencontre avec la trace du plan auxiliaire sur son plan.

Si le cône est défini par une surface inscrite, on considère la courbe d'intersection de cette dernière avec le plan auxiliaire et l'on mène à cette courbe les tangentes issues de S.

Application. — *Connaissant une projection d'un point d'un cône, trouver l'autre.* — Si l'on connaît, par exemple, la projection horizontale m, on est ramené à *trouver l'intersection du cône avec la verticale du point m.*

26. Section plane d'un cône. — Soit à construire l'intersection d'un cône C, de sommet S, avec un plan donné P.

On obtient *le point courant* M, en prenant une génératrice quelconque G du cône et construisant son intersection avec P. Pour avoir *la tangente* MT *en ce point*, on prend l'intersection du plan tangent au cône le long de G avec le plan P (n° 6).

Les points sur les contours apparents sont obtenus en prenant successivement pour G toutes les génératrices de contour apparent.

Les directions asymptotiques sont les génératrices d'intersection du cône avec le plan parallèle à P mené par S (n° 9). Ayant l'une d'elles G, on a *l'asymptote correspondante* par la construction habituelle de la tangente, c'est-à-dire en prenant l'intersection du plan tangent le long de G avec le plan P.

Dans le *cas où le cône est un cylindre*, on a les asymptotes en prenant les intersections de P avec les plans asymptotes. Si l'un de ceux-ci est rejeté à l'infini, la section a une branche parabolique, dont on obtient la direction en construisant l'intersection de P avec le plan des directions asymptotiques du cylindre.

27. Voici maintenant quelques problèmes qu'on peut se poser relativement à la section plane.

Problème I. — *Trouver les points de rencontre de la section avec une droite* D *quelconque du plan sécant.* — On est ramené au problème du n° 25.

Si l'on veut les *points de rencontre de la projection horizontale*, par exemple, avec une droite *d* donnée, il suffit de prendre, pour D, la droite du plan sécant qui se projette horizontalement en *d*.

Problème II. — *Mener les tangentes à la section par un point donné* M *du plan* P. — Ces tangentes déterminent, avec le sommet S, les plans tangents au cône menés par M. Or, nous savons construire ces plans (n° 22). En prenant leurs intersections avec P, nous aurons les tangentes demandées.

En prenant M à l'infini, on sait construire *les tangentes parallèles à une direction donnée* du plan sécant.

On sait résoudre le même problème *en projection*, en prenant, pour M, le point de P projeté au point donné.

Applications. — I. *Trouver les points les plus hauts et les plus bas des deux projections.* — Par exemple, pour trouver les points à tangente horizontale de la projection horizontale, on construit les *tangentes à la section parallèles aux frontales du plan sécant.*

II. *Trouver les points les plus à droite et les plus à gauche.* — Cela revient à mener à la section les *tangentes parallèles aux droites de profil du plan sécant.*

28. **Section plane d'un cône du second degré.** — Si le cône C est du second degré, la section est une conique Γ, ainsi que ses deux projections γ et γ'. Il est utile de savoir déterminer leurs éléments.

Genre. — On le déduit de la recherche des directions asymptotiques (n° 26). Si le plan Q parallèle à P mené par S coupe le cône suivant deux génératrices distinctes, Γ est une hyperbole, ainsi, par suite, que ses deux projections. Si Q est tangent au cône, Γ est une parabole. Enfin, si Q ne coupe pas le cône, Γ est une ellipse.

Section hyperbolique. — C'est le cas le plus avantageux au point de vue de la simplicité des constructions.

On commence par construire les asymptotes, comme il a été indiqué au n° 26. Il suffit ensuite de construire *un point quelconque*,

pour avoir tous les éléments nécessaires pour la construction de l'hyperbole (t. II, n° 541).

Si l'on veut *les axes*, on prend les bissectrices des asymptotes, soit dans le plan P, soit en projection. On a ensuite *les sommets* par application du problème I, du n° 27.

Section parabolique. — La génératrice G de contact du plan Q avec le cône donne *la direction de l'axe*, aussi bien dans le plan P que dans chaque projection. En menant la perpendiculaire, on a la direction de *la tangente au sommet*, laquelle tangente est ensuite obtenue par application du problème II, du n° 27. En menant, par son point de contact, la parallèle à G, *on obtient l'axe*. Il suffit ensuite de construire un point quelconque de la parabole (n° 143).

Section elliptique. — C'est le cas le plus difficile. Les directions asymptotiques sont imaginaires et l'on ne peut en déduire, comme précédemment, les directions des axes. Voici deux méthodes permettant de déterminer ceux-ci.

Première méthode. — On construit *deux diamètres conjugués*, en menant les tangentes parallèles à une direction quelconque, puis les tangentes parallèles à la droite joignant les points de contact des deux précédentes. (On peut, par exemple, utiliser les tangentes parallèles ou perpendiculaires à la ligne de terre; *cf.* Applications I et II du n° 27.) Ayant deux diamètres conjugués, on sait en déduire les axes (n° 142).

Deuxième méthode. — Supposons le cône défini par une base B, dans un plan R quelconque. Soit D l'intersection de R et de Q. Cette droite rencontre B en deux points imaginaires I et J. Les droites SI, SJ sont conjuguées harmoniques par rapport à tout système de deux droites menées par S parallèlement à deux diamètres conjugués de la section. Cela posé, supposons, par exemple, qu'on veuille construire les axes de la projection horizontale. Ces axes sont les projections de deux diamètres conjugués; donc, si on leur mène des parallèles *sa*, *sa'* par la projection horizontale du sommet, on obtient deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux droites *si*, *sj*, projections de SI, SJ. Ces droites *sa*, *sa'* sont les rayons rectangulaires de l'involution dont les rayons doubles sont *si*, *sj* (t. II, n° 143). On a d'ailleurs deux couples de rayons homologues en prenant, sur D, deux points quelconques M, N et les points de rencontre M', N' de D avec leurs polaires par rapport à B. Les projections de SM, SM' et de SN, SN' sont les couples en question. On est maintenant ramené au problème suivant : *construire les rayons rectangu-*

laires d'une involution déterminée par deux couples de rayons homologues, dont la solution résulte visiblement du théorème V (t. II, n° 567), en traçant un cercle quelconque passant par s.

Signalons un cas particulier où la construction est assez simple. C'est celui où la base est un cercle dans le plan horizontal. Les droites rectangulaires sa, sa' doivent rencontrer D en deux points a, a' conjugués par rapport au cercle B. Dès lors, le cercle Γ de diamètre aa' doit être orthogonal au cercle B. D'autre part, l'angle $\widehat{asa'}$ étant droit, ce cercle doit passer par s. Son centre se trouve donc sur l'axe radical du cercle B et du cercle-point s. En prenant l'intersection E de cet axe radical avec D, puis portant les longueurs Ea, Ea' égales à Es et joignant enfin sa, sa', on a les directions des axes.

Une fois connues les directions des axes, on mène les tangentes perpendiculaires (problème II, n° 27), et l'on a les tangentes aux sommets, les sommets et les axes.

Toutes ces constructions, sauf la dernière, s'appliquent sans modification lorsque le cône est un cylindre.

29. **Intersection de deux cônes.** — On coupe par des *plans auxiliaires passant par la ligne des sommets* SS_1. (C'est la même méthode que pour l'intersection de deux pyramides : n° 16. D'ailleurs, une pyramide peut être considérée comme un cône à base polygonale.) Un tel plan P coupe chaque cône suivant un certain nombre de génératrices. Le point de rencontre M d'une génératrice G du premier cône avec une génératrice G_1 du second est *un point quelconque* de la courbe C d'intersection. Pour construire *la tangente en ce point*, on applique la méthode des plans tangents (n° 6), c'est-à-dire qu'on prend l'intersection des plans tangents le long de G et de G_1.

Lorsque les deux cônes sont donnés par des bases B et B_1, on construit une fois pour toutes les traces σ et σ_1 de SS_1 sur les plans Q et Q_1 de ces bases. Les traces des plans auxiliaires passent par ces points fixes et se coupent constamment sur l'intersection D de Q et de Q_1. Nous n'insistons pas davantage sur ces détails de constructions, qui ont été déjà développés à propos de l'intersection de deux pyramides (n° 16).

Signalons seulement que, pour la construction de la tangente, il est quelquefois commode de considérer les plans tangents comme deux cônes de sommets S et S_1 et de leur appliquer la méthode ci-dessus, c'est-à-dire de les couper par un plan auxiliaire passant par SS_1.

30. Plans limites. — Les plans limites sont les *plans auxiliaires tangents à l'un ou l'autre des deux cônes.* On les obtient en menant par σ les tangentes à B et par σ_1 les tangentes à B_1 et ne conservant des premières, par exemple, que celles auxquelles correspondent des plans auxiliaires coupant B_1.

Signalons le cas particulier où un plan est *limite à la fois pour les deux cônes.* C'est un plan tangent commun; donc, *les deux cônes sont tangents* en un point M situé à la rencontre des deux génératrices de contact. Nous savons que ce point est un *point double* de l'intersection (n° 6) et nous savons déterminer les tangentes en ce point.

A propos de ces tangentes, nous allons démontrer le théorème suivant, qui s'applique toutes les fois qu'on a affaire à deux surfaces développables :

THÉORÈME. — *Les tangentes au point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux génératrices de contact.*

En effet, les indicatrices forment un parallélogramme, dont les côtés sont parallèles aux génératrices de contact (t. II, n° 574) et dont les diagonales sont les tangentes considérées. Le théorème est, dès lors, évident.

31. Jonction des points. — La règle est exactement la même que pour deux pyramides (n° 18). Dans le cas de deux bases convexes, il peut y avoir *pénétration* ou *arrachement* (n° 19), suivant que les plans limites sont tangents au même cône ou à des cônes différents. Le cas intermédiaire est celui du plan limite commun, c'est-à-dire du point double.

32. Points remarquables. — 1° *Points limites.* — Ils sont donnés par les plans limites. En chacun d'eux, la tangente est la génératrice d'intersection du plan auxiliaire avec le cône pour lequel il n'est pas limite (n° 7).

2° *Points sur les contours apparents.* — On les obtient en faisant passer les plans auxiliaires successivement par toutes les génératrices de contour apparent des deux cônes, tout en les maintenant, bien entendu, entre les plans limites.

3° *Points les plus hauts et les plus bas, les plus à droite et les plus à gauche.* — En un tel point, les traces des deux plans tangents sur un plan horizontal ou sur un plan de front, ou sur un plan de profil doivent être

parallèles (n° 8). Il est, en général, difficile de tenir compte d'une telle condition. Le seul cas où cela soit simple est celui où le plan sur lequel les traces doivent être parallèles coupe les deux cônes suivant des bases homothétiques, par exemple, suivant des cercles. Il suffit alors de faire passer le plan auxiliaire par le centre d'homothétie de ces deux bases.

4° *Points doubles apparents.* — Si les cônes sont du second degré, la ligne des points doubles en projection horizontale, par exemple, est la projection horizontale de l'intersection des deux plans déterminés par les génératrices de contour apparent horizontal des deux cônes, puisque ces plans sont les plans diamétraux conjugués des cordes verticales (n° 8).

33. **Branches infinies.** — On applique les considérations générales exposées au n° 9.

S'il s'agit de deux cônes, on a les directions asymptotiques en prenant les génératrices d'intersection de l'un d'eux avec le cône parallèle au second ayant même sommet que le premier. Ayant une telle direction, on a l'asymptote correspondante en prenant l'intersection des plans tangents aux deux cônes proposés le long des génératrices parallèles.

Si l'un des cônes est un cylindre, on peut le remplacer par ses plans asymptotes et l'on est ramené au cas de la section plane d'un cône (n° 26). Si un plan asymptote est à l'infini, c'est-à-dire si la base du cylindre possède une branche parabolique, l'intersection avec le cône possède aussi de telles branches, dont les directions asymptotiques sont données par l'intersection du cône avec le plan de directions asymptotiques du cylindre.

Signalons encore le cas particulier où une génératrice du cône est parallèle aux génératrices du cylindre. Le point à l'infini sur cette génératrice est un point double de l'intersection, parce qu'il doit être regardé comme le sommet du cylindre (n° 8). Les tangentes en ce point, c'est-à-dire les deux asymptotes, s'obtiennent en coupant le cylindre par le plan tangent au cône (n° 8).

Si l'on a affaire à *deux cylindres*, on peut les remplacer tous deux par leurs plans asymptotes. Le cas particulier signalé ci-dessus se présente alors lorsque les génératrices de l'un des cylindres sont parallèles à un plan asymptote de l'autre. Ce plan coupe le premier cylindre suivant les deux asymptotes.

34. **Branches virtuelles.** — Supposons que les deux cônes soient du second

degré et aient un plan de symétrie commun P, passant nécessairement par la ligne des sommets et, par exemple, de front. La courbe d'intersection, qui est une biquadratique, se projette verticalement suivant une conique, dont il peut être intéressant de déterminer les asymptotes des branches virtuelles. A cet effet, on emploie la méthode générale indiquée au n° 10. Pour avoir les directions asymptotiques, on peut mener, par le sommet S, un cône parallèle au cône C_1 et chercher les projections verticales des génératrices d'intersection. Coupons, par exemple, les deux cônes par un plan de bout Q ; soient γ et γ' les deux coniques de section. Si ces deux coniques se coupent en quatre points réels, il n'y a pas de difficultés, car les directions asymptotiques de l'espace sont toutes réelles et il n'y a pas de branches infinies virtuelles.

Si elles se coupent seulement en deux points réels A et B, il y a une branche infinie virtuelle, dont la direction asymptotique est la droite joignant S à la trace sur P de la sécante commune des deux coniques γ et γ' associée à AB. On peut avoir cette trace en prenant le point conjugué de la trace de AB dans l'involution de Desargues déterminée sur la trace de Q par le faisceau (γ, γ') (t. II, n° 505).

Si γ et γ' n'ont aucun point réel, les deux directions asymptotiques sont virtuelles. On les a, comme la précédente, en joignant S aux traces des deux sécantes communes de bout. Quant à ces traces, on peut les construire en appliquant le théorème de Desargues à deux droites quelconques du plan Q; on projette les deux involutions sur P et l'on cherche les points communs aux deux involutions projetées.

Bien entendu, si l'on peut trouver *a priori* un plan Q donnant deux sections homothétiques, le problème est simplifié, car la trace de ce plan sur P est une des directions cherchées. L'autre s'en déduit aisément. Par exemple, si γ et γ' sont deux cercles, la deuxième direction asymptotique est la droite joignant S à la trace de leur axe radical sur le plan P.

Si l'on connaît des plans tangents parallèles (n° 24), on peut encore procéder comme il suit. Soient G et G_1 les génératrices de contact de ces plans. Sur G, par exemple, prenons un point quelconque M. Puis, transportons le cône S_1 parallèlement à lui-même, de manière que G_1 vienne passer par M, le sommet S_1 restant dans le plan P. Dans cette nouvelle position, les deux cônes sont évidemment bitangents ; ils se coupent suivant deux coniques, dont les plans ont pour traces verticales les directions cherchées (n° 10).

35. **Cas de décomposition** [1]. — 1° *Une droite et une cubique gauche.* — Ceci arrive lorsque les deux cônes ont une génératrice commune. On le reconnaît à ce que les points σ et σ_1 sont respectivement sur les bases B et B_1. Chaque plan auxiliaire P ne donne alors qu'un

[1] Nous supposons les deux cônes du second degré (*cf.* t. II, n° 491).

seul point M de la courbe d'intersection et c'est ce point qui décrit la cubique.

Lorsque P est tangent à l'un des cônes le long de la génératrice commune, M vient au sommet de l'autre cône, la tangente en ce point étant la deuxième génératrice d'intersection de ce cône et de P (*cf.* t. II, n° 491, III).

Il peut arriver que *la cubique se décompose à son tour* en la génératrice commune SS_1 et une conique. Les deux cônes sont alors tangents le long de SS_1, ce qui se découvre nécessairement dans la recherche des plans limites.

2° *Deux coniques.* — Ce cas se présente quand *les deux cônes sont bitangents*, ce qu'on reconnaît toujours en construisant les plans limites. Les deux points de contact appartiennent à la fois aux deux coniques ; en coupant par un plan auxiliaire quelconque, on a deux autres points de chacune d'elles et, par conséquent, leurs plans respectifs. On est alors ramené au problème de la section plane (n° 28).

36. **Développement d'un cône.** — Développer un cône, c'est l'étendre sur un plan P, en imaginant que sa surface latérale est matérialisée au moyen d'un tissu flexible et inextensible. La propriété caractéristique de cette opération est qu'elle *conserve la longueur de toute ligne* tracée primitivement sur le cône et c'est cette propriété qu'on utilise, en même temps que la *conservation des angles* (t. II, n° 399), pour construire *la transformée d'une ligne donnée.*

Comme on ne sait pas, en général, déterminer graphiquement la longueur d'un arc de courbe, on est obligé de se contenter d'une *solution approchée.*

Soit à construire la transformée de la ligne Γ. Nous lui inscrivons une ligne polygonale de très petits côtés ABCD .... Puis, dans le plan P, nous construisons un triangle $S_1A_1B_1$ égal au triangle SAB. Ensuite, nous juxtaposons à ce triangle le triangle $S_1B_1C_1$ égal au triangle SBC et ainsi de suite. On arrive ainsi à développer la surface pyramidale SABCD .... En joignant par une courbe continue les points $A_1B_1C_1D_1$ ...., on obtient une ligne qui s'approche d'autant plus de la véritable transformée que les côtés AB, BC, CD, ... sont plus petits.

Pour avoir *la tangente* A_1T_1 *en* A_1 *à* Γ_1, on construit une droite faisant avec S_1A_1 un angle égal à l'angle que fait SA avec la tangente AT en A à Γ. On peut aussi (et cela revient au même) prendre un point T quelconque sur AT et construire un triangle $S_1A_1T_1$ égal au triangle SAT.

Quand on possède déjà la transformée d'une première courbe Γ, il est plus facile de construire la transformée d'une deuxième courbe Γ'. On mène des génératrices suffisamment rapprochées SAA', SBB', ... Puis, sur les droites homologues S_1A_1, S_1B_1, ..., on porte $A_1A'_1 = AA'$, $B_1B'_1 = BB'$, ... On joint enfin les points A'_1, B'_1, ... par une courbe continue.

Pour construire la tangente en A'_1, on peut utiliser le point de rencontre T des tangentes en A et A'. Les triangles AA'T et $A_1A'_1T_1$ sont égaux, parce que les côtés AA' et $A_1A'_1$ sont égaux, ainsi que les angles adjacents. Il s'ensuit que, pour avoir la tangente cherchée, il suffit de prendre, sur A_1T_1, le point T_1 homologue de T et de le joindre à A'_1. La longueur AT est quelquefois appelée la *sous-tangente de* Γ' *par rapport à* Γ.

Si la courbe Γ' présente une asymptote, la sous-tangente correspondante devient une *sous-asymptote* et permet, au moyen de la méthode ci-dessus, de construire l'asymptote de Γ'_1.

Comme *courbe de référence* Γ, il y a intérêt à choisir une courbe dont la transformée est aussi simple que possible. Par exemple, on peut prendre l'intersection du cône avec une sphère de centre S. *La transformée est évidemment un cercle*, de centre S_1 et de rayon égal au rayon de la sphère. Mais, bien entendu, pour marquer une série de points homologues, il faut encore inscrire une ligne polygonale, dont on reporte les côtés, de Γ sur Γ_1, au moyen d'un compas.

Si le cône est de révolution, la courbe sphérique précédente est un cercle, de rayon R sin φ, si R est le rayon de la sphère et φ le demi-angle au sommet du cône. Les angles au centre homologues sont dans le rapport inverse des rayons, puisque les arcs qu'ils interceptent doivent être égaux. On a donc : $\theta_1 = \theta \sin \varphi$. Cette formule permet de construire rigoureusement, au moyen d'un calcul simple et d'un rapporteur, des séries de points homologues.

Équation polaire de la transformée Γ_1. — Prenons S_1 pour pôle

et un axe polaire quelconque S_1x. Cet axe polaire rencontre Γ_1 en un point A_1, auquel correspond, sur Γ, le point A. Soient maintenant M un point quelconque de Γ' et N le point où SM rencontre Γ. Évaluons la longueur SM en fonction de la longueur s de l'arc AN de Γ, soit $SM = f(s)$. Dans le développement, M, N viennent en M_1, N_1 et l'angle polaire θ de ces points est évidemment égal à $\frac{s}{R}$. On en conclut que l'équation polaire de Γ'_1 est

$$r = f(R\theta).$$

37. **Cas du cylindre.** — La construction de Γ_1 au moyen d'un polygone inscrit se fait comme tout à l'heure, avec cette seule différence que le point S_1 est à l'infini. Toutes les droites S_1A_1, S_1B_1, ... sont parallèles. Le développement de différentes courbes à partir d'une courbe de référence se fait comme dans le cas du cône, ainsi que la construction des tangentes et asymptotes.

Comme courbe de référence, on peut prendre une section droite. La transformée est une droite, sur laquelle on porte des longueurs égales aux arcs de section droite, pour obtenir des séries de points homologues. Si l'on prend cette droite comme axe des x et un axe des y perpendiculaire, l'équation de la transformée d'une courbe quelconque est $y = f(x)$, si $f(s)$ désigne la longueur NM évaluée en fonction de l'arc $AN = s$.

38. **Rayon de courbure de la transformée.** — Reprenons la courbe Γ et, sur cette courbe, un point quelconque M. L'axe de courbure de Γ en M perce le plan tangent au cône en un point G, appelé *centre de courbure géodésique :* le vecteur MG est appelé *rayon de courbure géodésique* et l'on démontre qu'*il se conserve pendant la déformation*. Or, quand le cône est développé, le rayon de courbure géodésique n'est autre que le rayon de courbure ordinaire de la transformée Γ_1 au point M_1. Dès lors, pour avoir le centre de courbure C_1, il suffit de construire le point G, puis de reporter le vecteur MG du plan SMT suivant le vecteur homologue du plan $S_1M_1T_1$.

Pour que M_1 soit un *point d'inflexion* de Γ_1, il faut et il suffit que MG soit infini, c'est-à-dire que *le plan osculateur soit normal au cône*. En particulier, *les points d'inflexion de la transformée d'une section plane du cône sont les points homologues des points où le plan tangent au cône est perpendiculaire au plan sécant.*

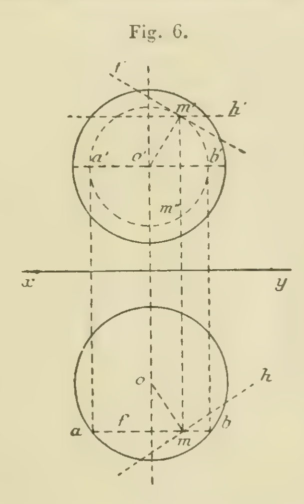
Toutes ces considérations sont valables pour le développement d'une *surface développable quelconque*.

CHAPITRE IV.

SPHÈRE.

39. **Contours apparents ; point courant, plan tangent.** — Le contour apparent horizontal d'une sphère, qui est le lieu des points de contact des plans tangents verticaux, est évidemment le grand cercle horizontal. Il se projette horizontalement en vraie grandeur, c'est-à-

Fig. 6.



dire suivant un cercle ayant pour centre la projection horizontale du centre de la sphère et pour rayon le rayon de la sphère. Quant à la projection verticale, elle se réduit à un diamètre horizontal. Le contour apparent vertical est, de même, le grand cercle de front. Pour avoir un point quelconque de la sphère, il suffit de prendre un point quelconque sur un petit cercle quelconque horizontal ou de front. On peut, par exemple, résoudre le problème suivant :

Problème. — *Connaissant la projection horizontale d'un point de la sphère, trouver la projection verticale.*

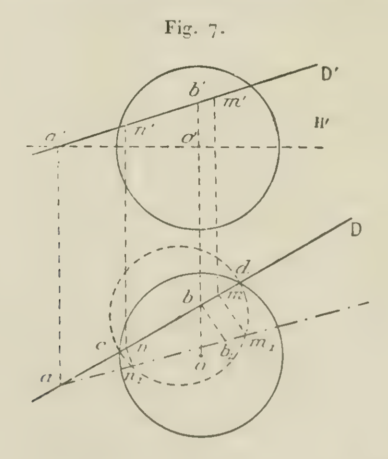
Coupons par le plan de front qui passe par m. Nous obtenons un cercle qui se projette verticalement en vraie grandeur et dont on a immédiatement le diamètre horizontal (ab, $a'b'$). La ligne de rappel du point m rencontre le cercle décrit sur $a'b'$ comme diamètre en deux points m' et m'', qui constituent les deux solutions du problème.

Le *plan tangent* au point (m, m') est le plan perpendiculaire au rayon (om, $o'm'$) ; on peut le déterminer par l'horizontale (h, h') et la frontale (f, f'), qui sont d'ailleurs les tangentes aux petits cercles horizontal et de front passant par (m, m').

40. **Intersection avec une droite.** — On coupe par un plan auxiliaire contenant la droite. Suivant la manière particulière de choisir ce plan, on a l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes :

Première méthode. — Coupons, par exemple, par le plan projetant horizontalement la droite. Nous obtenons un petit cercle, dont le diamètre horizontal est projeté horizontalement en vraie grandeur suivant cd et dont la projection verticale se trouve sur la droite H'. Rabattons ce cercle et la droite (D, D') de son plan autour du diamètre précédent. Le cercle se rabat suivant un cercle décrit sur cd

Fig. 7.

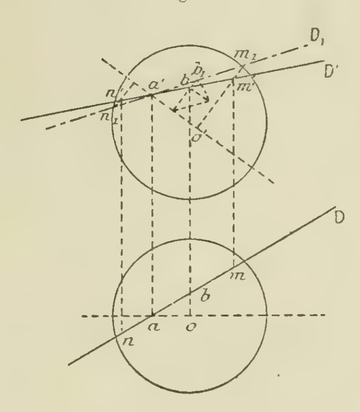


comme diamètre. La droite se rabat suivant ab_1 (bb_1 perpendiculaire à D et égal à $o'b'$). Les points m_1 et n_1 sont les rabattements des points cherchés ; ils se relèvent en (m, m') et (n, n').

Deuxième méthode. — Coupons par le plan déterminé par la

droite donnée et par le centre de la sphère. Nous obtenons un grand cercle, que nous rabattons, par exemple, autour de son diamètre de front (oa, $o'a'$). Ce rabattement coïncide évidemment avec le contour apparent vertical de la sphère ; il est donc tout construit. Reste à

Fig. 8.



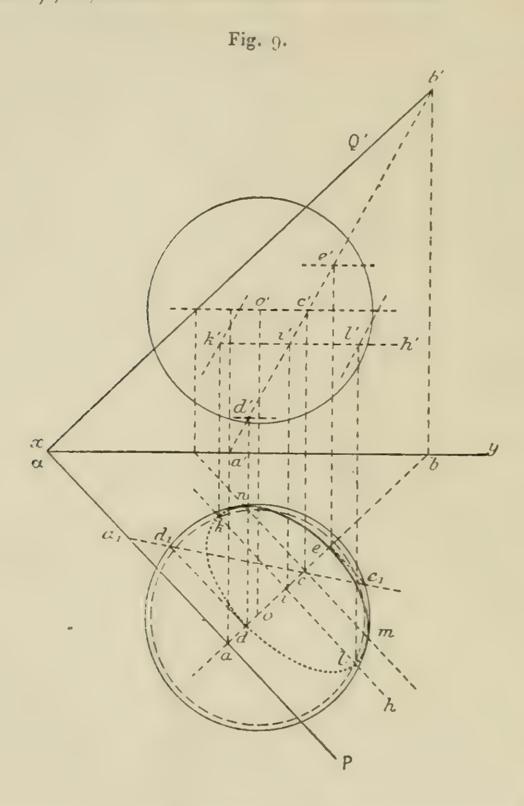
rabattre la droite (D, D′), ce qui se fait au moyen du point (a, a') sur la charnière et du point (b, b') rabattu en b_1, par la règle bien connue du triangle rectangle. Les points m_1 et n_1 sont les rabattements des points cherchés ; ils se relèvent en (m, m') et (n, n').

41. **Section plane.** — Toute section plane d'une sphère est un cercle, dont les deux projections sont, comme on sait, des ellipses. Le moyen le plus rapide pour construire celles-ci consiste à chercher leurs axes.

Cherchons, par exemple, les *axes de la projection horizontale*. Le plan sécant étant, pour fixer les idées, supposé défini par ses traces PαQ′, nous avons un premier axe en abaissant du point o la perpendiculaire oa sur P ; car le plan vertical passant par cette droite est un plan de symétrie à la fois pour la sphère et pour le plan sécant, donc pour leur intersection, donc pour la projection horizontale de cette intersection. (On peut aussi remarquer que oa est la projection horizontale du diamètre de plus grande pente du cercle.) Pour avoir les sommets de cet axe, nous déterminons la droite du plan sécant projetée horizontalement en oa, soit (ab, $a'b'$), et nous cherchons l'intersection de cette droite avec la sphère. En appliquant, par

exemple, la première méthode du n° 40, on obtient les deux points (d, d') et (e, e') ; d, e sont les sommets cherchés.

Fig. 9.



On a le deuxième axe en menant la perpendiculaire h au premier par le milieu i de de. Cet axe est d'ailleurs la projection horizontale du diamètre horizontal du cercle de l'espace, diamètre qui se projette verticalement suivant l'horizontale h' du point i'. On a les sommets correspondants en cherchant l'intersection de la droite (h, h') avec la sphère, ce qui se fait immédiatement en coupant par un plan horizontal ; on obtient ainsi les points (k, k') et (l, l').

Finalement, kl est le grand axe et de le petit axe de la projection horizontale.

Remarque. — Dans l'espace, les tangentes aux points (d, d') et (e, e') sont horizontales ; donc, en projection verticale, les tangentes aux points d' et e' sont parallèles à la ligne de terre ; ces points sont

le plus bas et le plus haut de l'ellipse projection verticale. Le diamètre horizontal $k'l'$ est, par suite, conjugué de $d'e'$; il en résulte que les tangentes en k' et l' sont parallèles à $d'e'$.

En intervertissant les rôles des deux plans de projection, on construirait de même les axes de la projection verticale et deux diamètres conjugués de la projection horizontale.

Points sur les contours apparents. — Ces points sont indispensables pour la ponctuation. Pour avoir les points sur le contour apparent horizontal, il suffit de couper par le plan horizontal du centre de la sphère. L'intersection de ce plan avec le plan sécant rencontre le contour apparent horizontal en m et n, qui sont les points cherchés.

Ponctuation. — Le point (d, d'), par exemple, est évidemment caché en projection horizontale ; il en est donc de même de tout l'arc mdn ; l'arc men est, au contraire, vu. On ponctuerait, de même, la projection verticale.

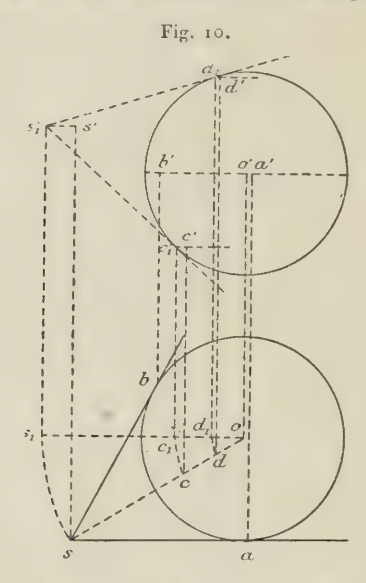
42. **Intersection de deux sphères.** — L'intersection de deux sphères est un cercle ; il suffit donc de déterminer le plan de ce cercle pour être ramené au problème précédent. A cet effet, on en détermine un point et l'on mène par ce point un plan perpendiculaire à la ligne des centres. Comme point particulier, il est tout indiqué de choisir un point utile de l'intersection, par exemple un des points sur les contours apparents des deux sphères, points qui doivent tous être déterminés, en vue de la ponctuation. A cet effet, on coupera par les plans des contours apparents.

43. **Cône circonscrit à une sphère à partir d'un point donné.** — La courbe de contact est un cercle, dont le plan est le plan polaire du point donné S par rapport à la sphère. Il suffit de connaître un point de ce plan pour le déterminer, puisqu'il est perpendiculaire au diamètre OS. On aura des points utiles, en cherchant les points de la courbe de contact situés sur les contours apparents. D'après le théorème III du n° 2, les points sur le contour apparent horizontal, par exemple, sont les points (a, a') et (b, b').

Le plan vertical passant par OS étant un plan de symétrie de toute

la figure, *so* est un axe de la projection horizontale. On peut avoir les sommets correspondants en menant du point S les tangentes au grand cercle situé dans le plan vertical précédent, ce qui se fait commodément par une rotation autour du diamètre vertical de la sphère ; on obtient ainsi les points *c* et *d*. La détermination des autres sommets se fait ensuite comme il a été expliqué au nº 41.

Fig. 10.



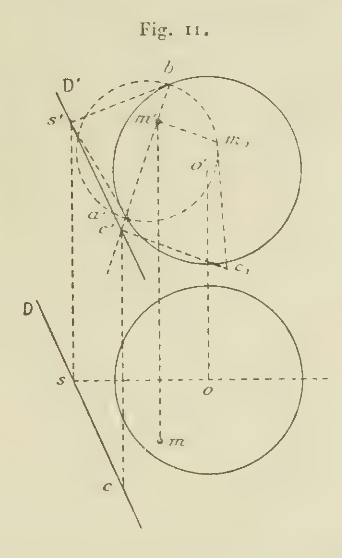
Lorsque le point S est à l'infini, on a affaire à un cylindre circonscrit. La courbe de contact est alors un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction des génératrices du cylindre. Les constructions indiquées dans le cas du cône subsistent sans modification.

Les deux problèmes que nous venons de résoudre trouvent une application importante dans la construction de la courbe d'ombre propre d'une sphère.

44. **Plans tangents par une droite donnée.** — Soit à mener les plans tangents à une sphère O par une droite donnée D. La méthode générale consiste à circonscrire à la sphère un cône ayant pour sommet un point S de D et à mener ensuite à ce cône les plans tangents qui passent par D. Suivant la manière de choisir le point S, on obtient diverses méthodes particulières, que nous allons décrire.

Première méthode. — Prenons S en (s, s') dans le plan de front du centre de la sphère. Le cercle de contact du cône circonscrit se

Fig. 11.

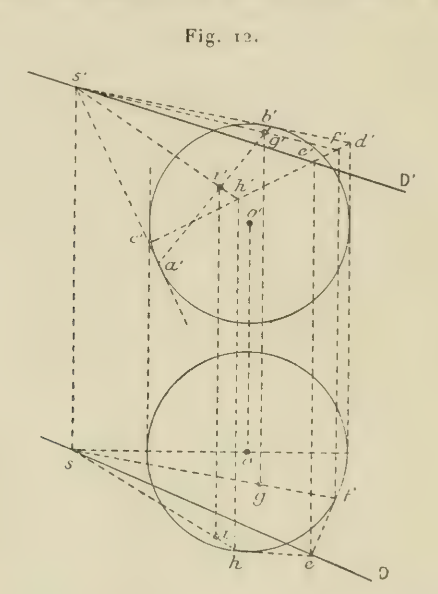


trouve dans le plan de bout $a'b'$. Prenons-le comme base du cône et appliquons, pour mener les plans tangents à ce cône par la droite D, la méthode générale du n° 22. Nous prenons la trace de D sur le plan de base, soit (c, c'). Nous devons maintenant mener par ce point les tangentes à la base. A cet effet, nous rabattons le plan de celle-ci autour de la frontale $(so, a'b')$. Le cercle de base se rabat suivant le cercle de diamètre $a'b'$ et le point (c, c') se rabat en c_1. De c_1, nous menons les tangentes au cercle rabattu ; soit m_1 le point de contact de l'une d'elles. Ce point se relève en (m, m'), qui est le point de contact de l'un des plans tangents cherchés.

Deuxième méthode. — C'est une simple variante de la précédente, dont elle ne diffère que par le choix de la base du cône. Ce choix repose sur l'artifice suivant. Considérons le cylindre vertical circonscrit à la sphère. Ce cylindre et le cône, étant deux quadriques circonscrites à une même troisième, se coupent suivant deux coniques (t. II, n° 492). A cause de la symétrie par rapport au plan de front os, les plans de ces deux coniques sont de bout ; l'un d'eux est, par exemple, le plan de bout $c'd'$. Prenons la conique correspondante

comme base du cône. Cette base, que l'on appelle quelquefois une *base de Monge*, offre l'avantage de se projeter horizontalement suivant le cercle de contour apparent horizontal de la sphère. Nous prenons la trace de D sur le plan $c'd'$, soit (e, e') ; de ce point, nous menons les tangentes à la base, ce qui se fait au moyen de la projection horizontale. Nous trouvons, par exemple, le point de contact

Fig. 12.



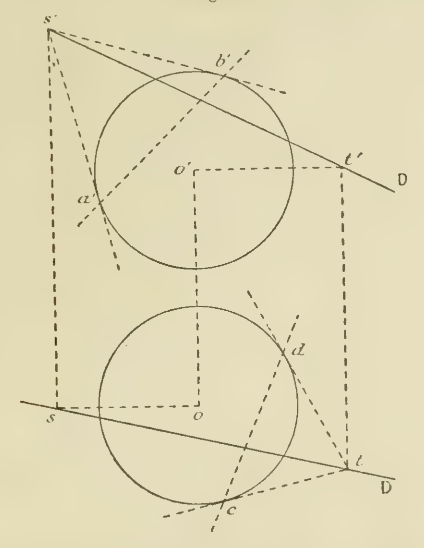
(f, f'). La droite $(sf, s'f')$ est la génératrice de contact d'un des plans tangents cherchés avec le cône circonscrit ; elle rencontre le cercle de contact au point (g, g'), qui est le point de contact du plan tangent avec la sphère.

Troisième méthode. — Elle consiste à considérer simultanément les deux cônes circonscrits dont les sommets sont l'un (s, s') dans le plan diamétral de front, l'autre (t, t') dans le plan diamétral horizontal. Les points de contact des plans cherchés se projettent verticalement sur $a'b'$ et horizontalement sur cd. Dans l'espace, ils se trouvent donc sur la droite $(cd, a'b')$ et il suffit, pour les construire, de prendre l'intersection de la sphère avec cette droite (nº 40).

Remarquons que cette droite n'est autre que la droite conjuguée de la proposée par rapport à la sphère (t. II, nº 436). Cela résulte de

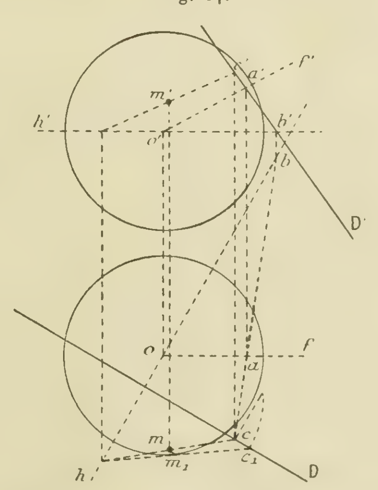
la construction précédente; on le voit aussi en observant qu'elle se

Fig. 13.



trouve à l'intersection des plans polaires des points (s, s') et (t, t').

Fig. 14.



Quatrième méthode. — Prenons le sommet du cône à l'infini; autrement dit, considérons le cylindre circonscrit, dont les généra-

trices sont parallèles à D. Prenons comme base de ce cylindre le cercle de contact. Le plan de ce cercle est le plan diamétral perpendiculaire à (D, D'); il est déterminé par l'horizontale (h, h') et la frontale (f, f'). Nous construisons son intersection (c, c') avec (D, D'). Il faut ensuite mener de ce point les tangentes à la base. Pour cela, nous faisons un rabattement autour du diamètre horizontal (h, h'). Le cercle se rabat suivant le contour apparent horizontal de la sphère et le point (c, c') se rabat en c_1, par la règle du triangle rectangle. De c_1, nous menons les tangentes telles que $c_1 m_1$. Le point m_1 se relève en (m, m'), qui est un des points de contact cherchés.

45. **Intersection d'une sphère et d'une surface quelconque.** — On peut construire par points l'intersection d'une sphère avec toute surface S susceptible d'être engendrée par une droite ou un cercle. Si la surface est réglée, on cherchera l'intersection de ses génératrices successives avec la sphère (n° 40). Par exemple, s'il s'agit d'un cône, on pourra couper par un plan variable passant par son sommet et qu'on pourra en outre assujettir à une autre condition destinée à simplifier les constructions, telle que d'être vertical ou de bout ou bien de passer par le centre de la sphère.

Si la surface est cerclée, on coupera par les plans de ses cercles.

46. **Emploi de la sphère comme surface auxiliaire pour les cônes et cylindres de révolution.** — La sphère est souvent utilisée, au titre de sphère inscrite, pour résoudre les problèmes relatifs aux cônes et cylindres de révolution.

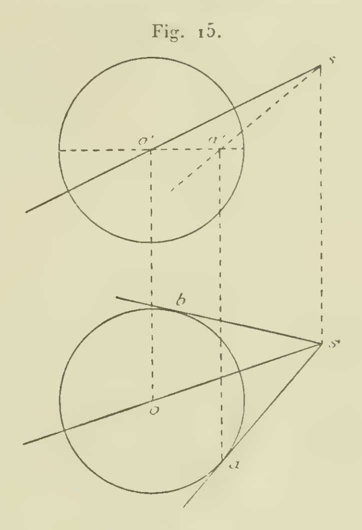
Construction d'une sphère inscrite. — Dans le cas d'un cylindre de révolution défini par son axe et son rayon, la construction est immédiate; il suffit de prendre une sphère ayant son centre en un point quelconque de l'axe et pour rayon le rayon du cylindre.

Supposons maintenant un cône défini par son axe, son sommet et son angle au sommet 2θ. Prenons le centre de la sphère inscrite en un point quelconque (o, o') de l'axe. Le rayon peut être construit au moyen d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est SO et un angle aigu l'angle θ donné. Le rayon cherché est le côté opposé à cet angle. Pour construire ce triangle, il faut commencer par construire la vraie grandeur du segment $(so, s'o')$, en faisant, comme on sait, un

rabattement ou une rotation. On effectue ensuite la construction élémentaire du triangle dans un coin ou sur une autre feuille de papier et il n'y a plus qu'à reporter le rayon obtenu sur l'épure.

Contours apparents. — Quand on a tracé les contours apparents de la sphère inscrite, on a immédiatement ceux du cône en leur menant des tangentes par les projections du sommet (n° 2). Si l'on a besoin de la projection verticale de la génératrice de contour apparent

Fig. 15.



horizontal sa, par exemple, il suffit de se rappeler que le point (a, a') se trouve sur le contour apparent horizontal de la sphère et, par conséquent, se projette verticalement en a' sur l'horizontale du point o'.

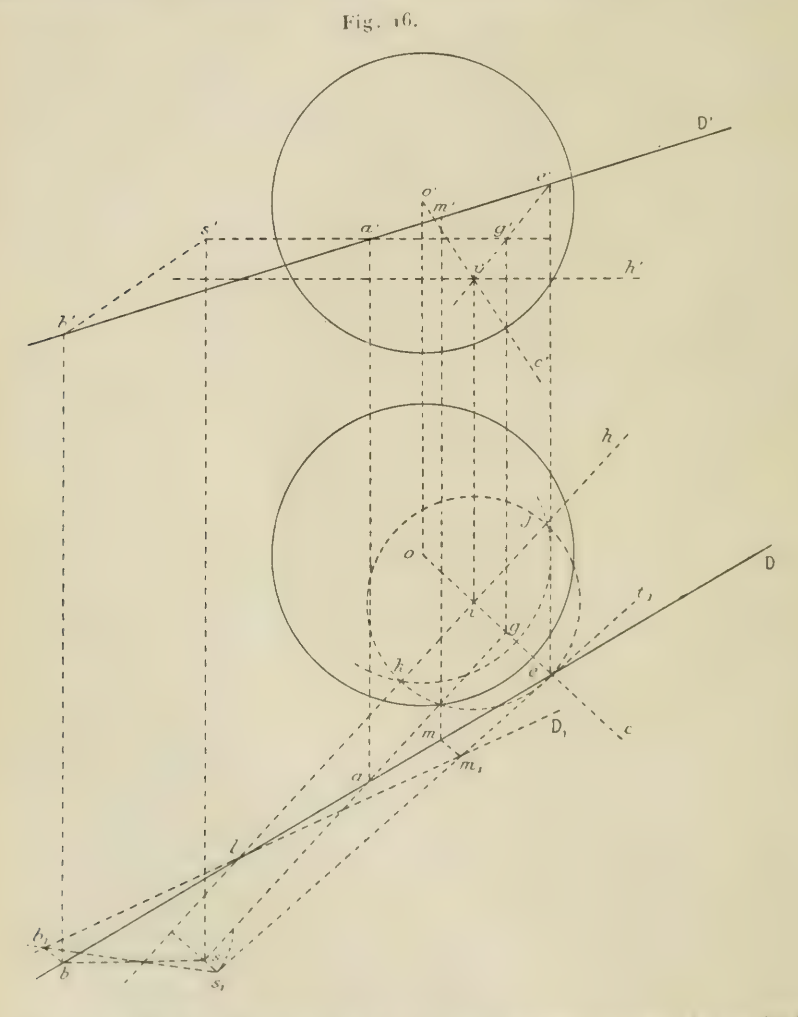
Dans le cas d'un cylindre, la construction est évidemment la même; on mène les tangentes parallèlement à l'axe du cylindre. Ce sont, dans chaque projection, les deux droites parallèles à la projection de l'axe et situées à une distance de celle-ci égale au rayon du cylindre. Cela est, du reste, évident *a priori* et l'on peut très bien, dans ce cas, se passer de la sphère inscrite.

Intersection avec une droite. — On emploie toujours la méthode générale du n° 25; c'est-à-dire qu'on coupe par le plan déterminé par la droite et le sommet du cône. Mais, au lieu de prendre la trace de ce plan sur un plan de base, on prend son intersection avec la

sphère inscrite et l'on mène à cette intersection les tangentes issues du sommet. Les points de rencontre de ces tangentes avec la droite proposée sont les points cherchés. Bien entendu, sur l'épure, l'exécution de ces constructions se fait au moyen d'un rabattement.

Sur la figure 16, on a rabattu autour du diamètre horizontal (ih, $i'h'$) du cercle de section, le centre (i, i') ayant été obtenu comme projection du

Fig. 16.



point (o, o') sur le plan (sD, s'D'). Le cercle se rabat suivant le cercle de diamètre jk, lequel diamètre a été construit en coupant par le plan hori-

zontal $i'h'$. Le point (s, s') et la droite (D, D') sont rabattus en s_1 et $b_1 l D_1$. On a mené la tangente $s_1 t_1$, qui rencontre D_1 en m_1, relevé ensuite en (m, m'), qui est l'un des points cherchés.

Comme cas particulier, signalons le problème suivant :

Connaissant la projection horizontale m d'un point du cône, trouver sa projection verticale.

Cela revient, en effet, à trouver l'intersection du cône avec la verticale du point m.

Plans tangents par un point donné. — Cela revient à mener les plans tangents à la sphère inscrite par la droite joignant le point donné au sommet du cône (n° 44). Les génératrices de contact s'obtiennent en joignant le sommet du cône aux points de contact avec la sphère.

Remarque. — Bien entendu, tous ces problèmes peuvent être aussi résolus par les méthodes exposées au Chapitre III, en prenant une base circulaire. Il y a lieu alors de faire des constructions dans le plan de cette base, et pour cela, il faut rabattre ce plan. Les deux manières de procéder sont à peu près équivalentes au point de vue de la complication des constructions.

CHAPITRE V.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

---

47. Point courant et plan tangent. — Une surface de révolution est habituellement déterminée par son axe et une ligne génératrice G. Pour avoir *un point quelconque* d'une telle surface, on prend un point A sur la ligne G et on le fait tourner d'un angle quelconque autour de l'axe; autrement dit, on prend un point quelconque M sur le parallèle engendré par A.

Le *plan tangent en ce point* contient d'abord la tangente au parallèle. Il contient, en outre, la tangente à la ligne génératrice qui passe par M, tangente qui peut se construire en effectuant une rotation de la tangente en A à G. Ces deux droites déterminent en général, le plan tangent cherché. (Pour le cas d'exception, *cf.*, t. II, n° 363.)

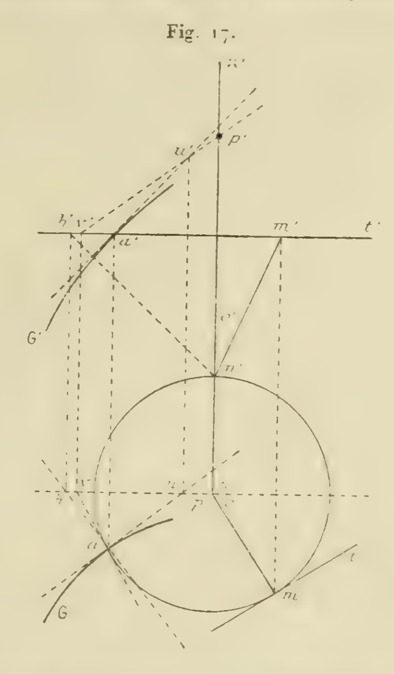
Pratiquement, au lieu d'effectuer la rotation de la tangente ci-dessus, il est plus commode de construire le point de rencontre de l'axe avec le plan tangent en A; ce point détermine, avec la tangente au parallèle en M, le plan tangent cherché.

On peut aussi *construire la normale*. A cet effet, il suffit de joindre M au point de rencontre de l'axe avec la normale en A, lequel point peut être obtenu comme intersection de l'axe avec le plan normal à G.

Ces différentes constructions ne sont simples que si l'axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection. Soit, par exemple, l'axe vertical $(o, o'z')$. Le parallèle du point A se projette horizontalement suivant le cercle de centre o et de rayon oa et verticalement suivant la parallèle à xy menée par a'. Il est aisé d'y prendre un point quelconque (m, m'). Le plan tangent en ce point est déterminé par la tangente $(mt, m't')$ au parallèle et par le point (p, p') où le plan tangent en (a, a') rencontre $(o, o'z')$. La normale est $(mn, m'n')$,

le point (n, n') ayant été construit comme intersection de $(o, o'z')$, avec le plan perpendiculaire en (a, a') à la tangente $(au, a'u')$.

Fig. 17.



Si l'axe est oblique sur les deux plans de projection, le parallèle du point A doit être déterminé par son plan, mené par A perpendiculairement à l'axe et par une sphère passant par A et ayant son centre en un point quelconque de l'axe, par exemple, à la même cote que A, de façon que le rayon qui aboutit au point A se projette horizontalement en vraie grandeur. On peut ensuite couper la sphère et le plan par un plan auxiliaire quelconque, par exemple, par un plan horizontal ; on détermine ainsi deux points du parallèle. Quant au plan tangent, on l'obtient comme précédemment : les constructions sont seulement plus compliquées.

Si l'axe est de front, il y a quelques simplifications. Le parallèle se projette verticalement suivant un segment de droite et l'on peut se donner la projection verticale m' du point M.

Nous conseillons au lecteur de faire les épures correspondant à chacun de ces deux cas.

48. Problème. — *L'axe étant vertical, construire m' connaissant m et vice versa.*

On cherche le parallèle qui passe par M. Si l'on connaît m, on

peut tracer la projection horizontale du parallèle; on prend l'intersection de cette projection avec la projection horizontale g de G; on relève chacun des points obtenus sur g' et l'on en déduit les projections verticales de tous les parallèles qui répondent à la question. Ces projections sont enfin rencontrées par la ligne de rappel de m aux points m' cherchés.

Si l'on se donne m', on suit la marche inverse, c'est-à-dire que l'on part de la projection verticale du parallèle.

Problème. — *L'axe étant de front, construire m connaissant m'.* — On emploie la même méthode que précédemment. Seulement, une fois qu'on a obtenu le point A de G, on achève de déterminer le parallèle par une sphère ayant son centre sur l'axe et l'on coupe cette sphère par un plan horizontal auxiliaire passant par m'.

Nous laissons encore au lecteur le soin de faire les épures correspondant à ces deux problèmes.

49. **Méridienne principale.** — On appelle ainsi la méridienne dont le plan est parallèle à l'un des plans de projection. Elle n'existe évidemment que si l'axe est lui-même parallèle à l'un de ces plans. Son intérêt résulte de ce que, lorsqu'elle est construite, elle permet de se rendre compte de la forme de la surface, ce qui n'est pas toujours facile quand on connaît seulement une courbe génératrice quelconque. Nous verrons, en outre, qu'elle constitue une partie d'un des contours apparents (n° 50).

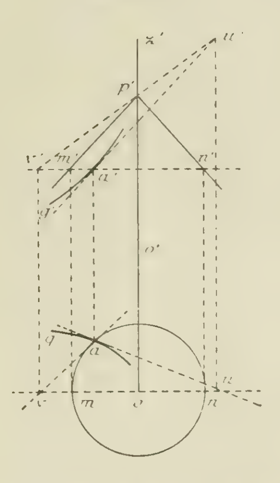
Supposons, pour fixer les idées, que l'axe (A, A') soit de front. Pour construire un point quelconque de la méridienne principale, on prend un point qnelconque (a, a') de la génératrice et l'on construit l'intersection du parallèle engendré par ce point avec le plan de front A.

Si l'axe est vertical, la construction est immédiate (*fig.* 18). S'il est oblique, il faut utiliser la sphère de centre (o, o') et de rayon oa. Cette sphère est coupée par le plan de front suivant un grand cercle projeté verticalement en vraie grandeur; cette projection coupe la perpendiculaire à A' menée par a' en deux points de la méridienne principale (*fig.* 19).

La tangente en m' est la trace verticale du plan tangent en (m, m') à la surface, puisque ce plan tangent est de bout, comme étant per-

pendiculaire au plan méridien de front (t. II, n° 362). Or, nous savons construire ce plan tangent (n° 47). Le plus simple est de

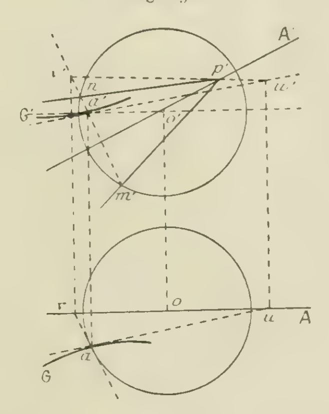
Fig. 18.



joindre m' au point p' où l'axe perce le plan tangent en (a, a'), (*fig.* 18 et 19).

Comme points remarquables de la méridienne principale, signalons,

Fig. 19.



dans le cas où l'axe est vertical, *les points les plus hauts et les plus bas*, qui sont fournis par les points analogues de G, c'est-à-dire par les points de cette courbe où la tangente est horizontale. Signalons

aussi les points où la tangente est parallèle à l'axe, qui sont donnés par les parallèles de rayon maximum ou minimum. Ces derniers sont engendrés par les pieds des normales communes à l'axe et à G, lesquels sont obtenus, en projection horizontale, en abaissant du point o les normales sur g.

50. **Contours apparents.** — Supposons d'abord l'*axe vertical*.

Si le point M appartient au contour apparent horizontal, le plan tangent en ce point est vertical, donc parallèle à l'axe. Il s'ensuit visiblement qu'il est perpendiculaire au rayon PM du parallèle. Par suite, ce rayon est normal à la courbe génératrice G. Réciproquement, si PM est normal à G en M, comme il est aussi normal au parallèle, il est perpendiculaire à deux droites du plan tangent, donc perpendiculaire à ce plan (en supposant toutefois que ces deux droites sont distinctes, c'est-à-dire que l'on ne se trouve pas dans le cas d'exception signalé au n° 362 du Tome II); comme PM est une horizontale, le plan tangent est vertical et le point M appartient au contour apparent horizontal. En définitive, sauf le cas d'exception signalé entre parenthèses, *le contour apparent horizontal est constitué par les parallèles de rayon maximum ou minimum.*

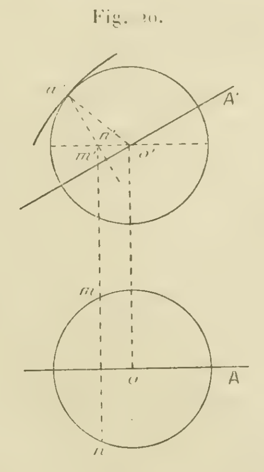
Supposons maintenant que M fasse partie du contour apparent vertical. Le plan tangent en ce point est de bout; donc, la normale est de front. Le plan méridien qui passe par M contient cette normale; comme il contient aussi l'axe, qui est une deuxième frontale, il est de front et M appartient à la méridienne principale. Ceci est toutefois en défaut si la normale en M est parallèle à l'axe, puisque les deux frontales sont alors parallèles. Dans ce cas, le plan tangent en M est horizontal, donc aussi la tangente à G; le parallèle qui passe par M est un parallèle le plus haut ou le plus bas. Réciproquement, si M appartient à la méridienne principale, le plan tangent en ce point est perpendiculaire au plan méridien de front; il est donc de bout. De même, si la tangente en M à G est horizontale, mais non perpendiculaire au plan méridien, le plan tangent en ce point est horizontal, donc de bout. En définitive, *le contour apparent vertical est constitué par la méridienne principale et par les parallèles les plus hauts et les plus bas.*

Remarque. — Le cas d'exception qui provient du cas où la

courbe G est normale au plan méridien ne se présente jamais si cette courbe est une méridienne. On évite donc toute restriction aux deux règles précédentes, en prenant, par exemple, la méridienne principale pour courbe génératrice.

51. Supposons maintenant l'*axe oblique* sur le plan horizontal, mais de front. Le contour apparent vertical est encore constitué, comme précédemment, par la méridienne principale et par les parallèles engendrés par les points de cette méridienne où la tangente est perpendiculaire à l'axe. Quant au contour apparent horizontal, c'est une courbe plus ou moins compliquée, que l'on est obligé de construire par points. A cet effet, on cherche les points situés sur un parallèle quelconque, en *remplaçant la surface par la sphère inscrite* le long de ce parallèle (on pourrait aussi la remplacer par le cône circonscrit, *cf.*, n° 56; mais, la construction serait un peu plus compliquée). Le contour apparent horizontal de cette sphère

Fig. 20.



rencontre le parallèle en deux points (m, m') et (n, n') appartenant au contour apparent horizontal de la surface; de plus, ce dernier est tangent au contour apparent de la sphère en chacun de ces points (n° 2).

Si l'axe est oblique à la fois sur les deux plans de projection, il faut appliquer la méthode ci-dessus aux deux contours apparents. Mais la construction est plus compliquée, à cause de la recherche du

centre de la sphère inscrite, que l'on détermine au moyen du plan normal à la courbe génératrice, et aussi à cause de la construction de l'intersection du parallèle avec le contour apparent de la sphère. Nous laissons au lecteur le soin de faire l'épure à titre d'exercice.

52. *Remarque.* — La méthode ci-dessus peut être appliquée à la construction des contours apparents de *toute surface périsphère* (t. II, n° 281). Appliquons-la, par exemple, au *tore*, en considérant cette surface comme l'enveloppe de la sphère inscrite le long de chaque cercle méridien. Le contour apparent horizontal du tore est l'enveloppe du contour apparent horizontal de cette sphère. Or, celui-ci est un cercle de rayon constant, dont le centre décrit une ellipse, projection du cercle lieu des centres des méridiens. Son enveloppe est *une courbe parallèle à l'ellipse* déférente, obtenue en portant sur chaque normale à cette ellipse, de part et d'autre du pied, une longueur égale au rayon constant du cercle.

On a évidemment une construction analogue pour les contours apparents de toute surface enveloppe d'une sphère de rayon constant.

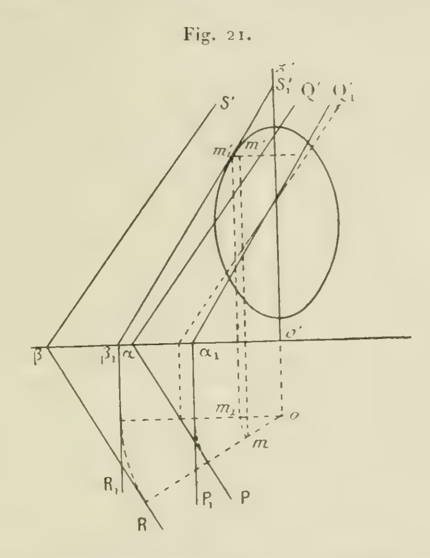
53. **Problèmes sur les plans tangents.** — Nous allons maintenant exposer la solution de quelques problèmes classiques relatifs aux plans tangents. Avant d'en aborder aucun, nous ferons la remarque générale suivante. En vertu de la propriété fondamentale des surfaces de révolution (t. II, n° 361), on peut toujours faire tourner les données d'un angle quelconque autour de l'axe de la surface, faire la construction des plans tangents dans cette nouvelle position, puis revenir en place par la rotation inverse. On conçoit que l'on puisse quelquefois choisir l'amplitude de la rotation de manière à simplifier la construction demandée. Toutefois, cette méthode n'est pratiquement avantageuse que si les rotations peuvent s'effectuer facilement, c'est-à-dire si l'axe de la surface est perpendiculaire à l'un des plans de projection. C'est ce que nous supposerons généralement dans ce qui va suivre.

54. **Problème I.** — *Plans tangents parallèles à un plan donné.* — Soit une surface de révolution à axe vertical, que nous nous donnons par sa méridienne principale. Nous voulons lui mener les plans tangents parallèles au plan $P\alpha Q'$.

Commençons par faire une rotation pour *amener ce plan à être de bout* et soit $P_1\alpha_1 Q'_1$ sa nouvelle position. Les points de contact des plans cherchés appartiennent maintenant au contour apparent vertical, donc à la méridienne principale (nous laissons de côté le cas

particulier évident où le plan donné serait horizontal). En chacun de ces points, la tangente à cette méridienne doit être parallèle à $\alpha_1 Q'_1$.

Fig. 21.



Nous menons donc ces tangentes. Soit $m'_1 S'_1$ l'une d'elles; le plan tangent correspondant est $R_1 \beta_1 S'_1$; son point de contact est (m_1, m'_1). Faisons maintenant la rotation inverse; nous obtenons le plan $R\beta S'$ et le point de contact (m, m').

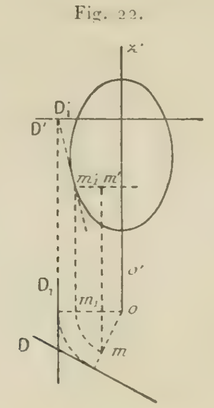
55. **Problème II.** — *Plans tangents par une droite donnée.* — La solution de ce problème n'est simple que dans les deux cas particuliers suivants :

Premier cas : La droite est perpendiculaire à l'axe de la surface. — Cet axe étant toujours supposé vertical, amenons, par une rotation, la droite (D, D') donnée *à être de bout*, ce qui est possible, puisque nous la supposons horizontale. Avec cette nouvelle position, les plans tangents cherchés doivent être de bout; leurs traces verticales sont les tangentes à la méridienne principale issues du point D'_1. Soit (m_1, m'_1) le point de contact de l'une d'elles. La rotation inverse l'amène en (m, m'), qui est le point de contact de l'un des plans demandés (*fig.* 22).

Remarque. — Le problème du numéro précédent est un cas par-

ticulier de celui-ci. La droite donnée est à l'infini et peut être considérée comme perpendiculaire à n'importe quelle droite de l'espace, en particulier à l'axe.

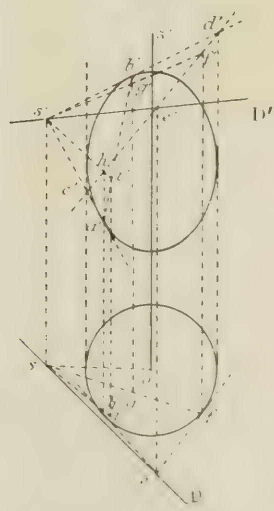
Fig. 22.



Deuxième cas : La droite est quelconque; mais la surface est une quadrique. — On emploie la même méthode que pour la sphère (n° 44).

Soit, par exemple, un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Pre-


Fig. 23.

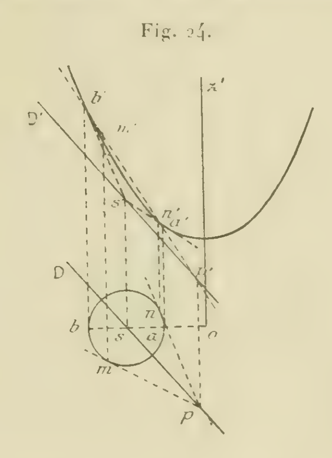


nons, sur la droite donnée (D, D'), le point (s, s') situé dans le plan de front de l'axe et substituons à la surface le cône circonscrit à

partir de ce point. La courbe de contact est une ellipse, projetée verticalement suivant $a'b'$. Comme c'est une base trop compliquée, prenons une base de Monge (nº 44), obtenue au moyen du cylindre vertical circonscrit. A partir de ce moment, les constructions sont exactement les mêmes que pour la sphère.

Cas du paraboloïde. — La base de Monge est en défaut lorsque la quadrique est un paraboloïde, car le cylindre vertical circonscrit

Fig. 24.



est infini. Mais, dans ce cas, on peut prendre comme base la courbe de contact, car on sait que sa projection horizontale est un cercle (t. II, nº 560) (¹). La construction est alors simplifiée; les points de contact des plans tangents cherchés sont obtenus immédiatement en menant, du point (p, p'), les tangentes à l'ellipse de contact, ce qui se fait au moyen de la projection horizontale. On obtient ainsi les deux points (m, m') et (n, n').

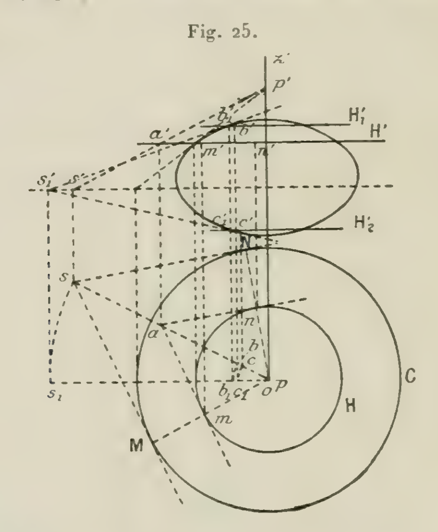
56. **Problème III. — Plans tangents par un point donné.** — Il y a une infinité de plans répondant à la question; ce sont les plans tangents au cône circonscrit à partir du point donné. Le problème actuel consiste, à proprement parler, à construire la courbe de contact de ce cône, ce qui est très important pour les questions d'ombre.

(¹) Rappelons que le centre de ce cercle est s.

Si la surface est quelconque, cette courbe ne peut être construite que par points. Deux méthodes peuvent être employées pour obtenir un point quelconque.

I. *On assujettit le point de contact à se trouver sur un parallèle donné.* — On remplace alors la surface par le cône circonscrit le long de ce parallèle. L'axe étant toujours supposé vertical, soient (s, s') et (H, H') le point et le parallèle donnés. Le cône circonscrit a pour sommet (p, p'). Il faut lui mener les plans tangents issus

Fig. 25.



de (s, s'). A cet effet, nous appliquons la méthode générale du n° 22; nous prenons la trace (a, a') de la droite $(sp, s'p')$ sur le plan de base et nous menons, par cette trace, les tangentes am, an au cercle de base. Les points (m, m') et (n, n') sont les points de contact cherchés.

Cas où le sommet du cône auxiliaire sort des limites de l'épure. — Ceci arrive lorsque le parallèle choisi est très près d'un parallèle maximum ou minimum. Dans ce cas, on utilise la variante suivante, que l'on peut aussi employer, bien entendu, dans le cas général.

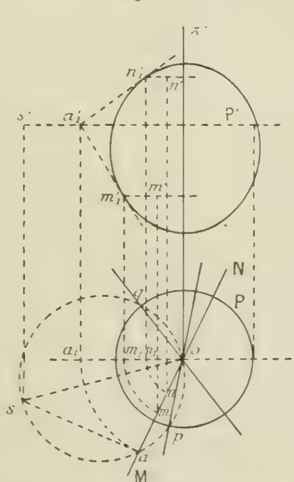
On prend la base du cône auxiliaire dans le plan horizontal du point (s, s'). On n'a pas alors à chercher la trace de la ligne $(sp, s'p')$, puisque cette trace est le point (s, s') lui-même. On mène les tan-

gentes sM et sN au cercle C; les génératrices de contact se projettent horizontalement en pM et pN; elles rencontrent (H, H') aux points de contact cherchés (m, m') et (n, n').

Parallèles limites. — La construction précédente n'est possible que si le point s est extérieur au cercle C. Le cas limite est celui où s est sur C et les parallèles qui donnent naissance à ce cas sont appelés les *parallèles limites*. Pour les trouver, il suffit de remarquer que le cône circonscrit le long de chacun d'eux doit passer par (s, s'); la génératrice de ce cône qui passe par ce point est évidemment une des tangentes menées par (s, s') à la méridienne dont le plan a pour trace horizontale os. Ces tangentes se construisent aisément en faisant une rotation qui amène (s, s') en (s_1, s'_1), dans le plan de front de l'axe. Les parallèles H'_1 et H'_2 qui passent par les points de contact des tangentes à la méridienne principale issues de s_1 sont les parallèles limites. En ramenant ces points de contact par la rotation inverse, on a, en projection horizontale, les sommets de la courbe de contact situés sur l'axe de symétrie évident os et, en projection verticale, les points les plus hauts et les plus bas.

57. II. *On assujettit le point de contact à se trouver sur un méridien donné.* — On remplace la surface par le cylindre circonscrit le long de ce méridien.

Fig. 26.



Supposons toujours l'axe vertical et soit MN le méridien donné. Nous menons par (s, s') la parallèle aux génératrices du cylindre, c'est-à-dire la perpendiculaire au plan méridien et nous prenons sa trace (a, a') sur ce plan. De cette trace, nous devons mener les tangentes à la base du cône, c'est-à-dire à la courbe méridienne. A cet effet, nous effectuons une rotation, de manière à amener le plan méridien à être de front. Le point (a, a') vient en (a_1, a'_1). De a'_1, nous menons les tangentes à la méridienne principale, soit $a'_1 m'_1$ et $a'_1 n'_1$. En revenant en place, nous obtenons en (m, m') et (n, n') les points cherchés.

Méridiens limites. — La construction n'est possible que si l'on peut mener les tangentes $a'_1 m'_1$ et $a'_1 n'_1$. Le cas limite est celui où a'_1 se trouve sur la méridienne principale. Pour cela, il faut et il suffit que (a, a') se trouve sur le parallèle (P, P') qui a même cote que s'. Comme le lieu du point a est le cercle de diamètre so, en prenant les points de rencontre p et q de ce cercle avec le cercle P, on a, en op et oq, les traces des *méridiens limites*. (Observons que p et q sont les points de contact des tangentes menées par s au cercle P.)

58. *Tangente à la courbe de contact.* — Un point quelconque (m, m') étant obtenu par l'une ou l'autre des deux méthodes précédentes, on peut se proposer de construire la tangente en ce point à la courbe de contact. Cela n'est simple que si l'on a affaire à une quadrique, parce que la courbe est plane; il suffit alors de prendre l'intersection de son plan avec le plan tangent en (m, m') à la surface.

Si l'on a affaire à une surface quelconque, on peut se ramener au cas précédent, en remplaçant la surface par la quadrique engendrée par la conique ayant pour axe l'axe de la surface et osculatrice à la méridienne au point considéré. Ceci suppose, bien entendu, que l'on sait construire le centre de courbure de cette méridienne.

On peut aussi, et c'est généralement plus simple, appliquer le théorème de Dupin (t. II, n° 344) et prendre la droite conjuguée harmonique de SM par rapport aux tangentes asymptotiques du point M. Ceci suppose aussi la connaissance du centre de courbure de la méridienne, qui est nécessaire pour la détermination des tangentes asymptotiques (t. II, n° 363).

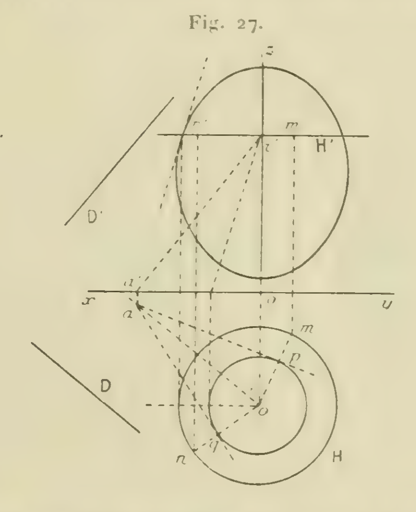
59. *Points sur les contours apparents.* — On a les points sur le contour apparent horizontal, en appliquant la méthode du parallèle

aux parallèles de contour apparent horizontal. On a les points sur le contour apparent vertical, en appliquant la méthode du méridien au méridien de front. Il est aisé de vérifier que, dans les deux cas, cela revient à mener des tangentes au contour apparent par la projection de même nom du point S, conformément au théorème III du n° 2.

60. **Cas du cylindre circonscrit.** — Pour construire la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à une direction donnée (D, D'), on applique les méthodes précédentes, en prenant le point (s, s') à l'infini sur cette direction. Les seules modifications à signaler sont les suivantes :

La variante de la méthode du parallèle exposée au n° 56 n'est plus applicable. On la remplace alors par la suivante. On prend un point fixe quelconque (i, i') sur l'axe et l'on considère le cône ayant pour

Fig. 27.



sommet ce point et parallèle au cône circonscrit le long du parallèle. On lui mène les plans tangents parallèles à (D, D'), en menant par (i, i') la parallèle (ia, $i'a'$) à cette droite, prenant la trace horizontale (a, a') de cette parallèle et menant du point a les tangentes ap, aq à la base du cône. Comme les génératrices de contact des plans tangents cherchés avec le cône circonscrit sont parallèles aux génératrices de contact des plans tangents menés ci-dessus, ces génératrices se projettent horizontalement suivant ip, iq. Elles rencontrent le cercle H aux points m et n, qui se rappellent en m' et n'.

Pour appliquer la méthode du méridien, on doit mener, par un point A arbitrairement choisi dans l'espace, une parallèle à (D, D′) et une parallèle aux génératrices du cylindre (n° 22). En choisissant convenablement ce point arbitraire, on peut amener des simplifications dans les constructions ultérieures. Voici comment on pro-

Fig. 28.

cède. On prend un point quelconque (p, p') sur l'axe; par ce point, on mène une parallèle à (D, D′) et l'on prend sa trace horizontale. C'est cette trace que l'on choisit pour point A. Voici, dès lors, les constructions que l'on doit faire pour l'application de la méthode.

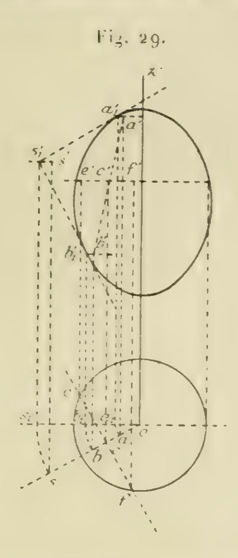
On projette (a, a') en (b, b') sur le méridien MN. Il n'y a plus ensuite qu'à mener des tangentes à la méridienne parallèlement à la droite $(bp, b'p')$, ce qui se fait par une rotation amenant cette droite à être de front, soit en $(pb_1, p'b'_1)$. On mène ensuite les tangentes à la méridienne principale parallèles à $p'b'_1$ et l'on effectue la rotation inverse sur les points de contact.

61. Éléments de la courbe de contact dans le cas d'une quadrique de révolution. — Si la surface est une quadrique, la courbe de contact du cône circonscrit de sommet (s, s') est une conique, dont le plan est le plan polaire de (s, s') par rapport à la quadrique. Il est important de savoir construire les éléments de cette conique. Outre les méthodes qui seront indiquées au n° 62 pour une section plane quelconque, voici la marche que l'on peut suivre.

Soit, par exemple, un ellipsoïde à axe vertical. Il s'agit de construire la courbe de contact du cône circonscrit de sommet (s, s').

Commençons par faire une rotation pour amener (s, s') en (s_1, s'_1) dans le plan de front de l'axe. Le plan de l'ellipse de contact est maintenant le plan de bout $a'_1 b'_1$. Les points a_1 et b_1 sont deux sommets de la projection horizontale et a'_1, b'_1 sont les points le plus

Fig. 29.



haut et le plus bas de la projection verticale. Dans la rotation inverse, ces propriétés se conservent toutes deux : a et b sont deux sommets de la projection horizontale et a', b' sont les points le plus haut et le plus bas de la projection verticale ([1]).

Le deuxième axe de la projection horizontale est la perpendiculaire au milieu de ab. Pour avoir ses sommets, observons qu'il est la projection horizontale de l'axe horizontal de la courbe de l'espace (ab étant la projection de l'axe de plus grande pente), dont la projection verticale est la parallèle à la ligne de terre menée par le milieu c' de $a'b'$. Il suffit, dès lors, de couper par le plan horizontal passant par c' et l'on a, en e, f, les sommets cherchés. Des lignes de rappel donnent ensuite les points e', f', extrémités du diamètre horizontal de la projection verticale.

Nous connaissons finalement les *axes de la projection horizontale et deux diamètres conjugués de la projection verticale.*

([1]) Ces points ont été déjà donnés par les parallèles limites (n° 56).

62. Section plane d'une surface de révolution. — Pour avoir un point quelconque, *on coupe par le plan d'un parallèle*. Si l'axe est, par exemple, vertical, on peut aussi *couper par un plan méridien* et faire une rotation pour amener ce plan à être de front.

La tangente est donnée par l'intersection du plan sécant et du plan tangent ou bien par la méthode des normales.

Si l'axe est vertical, les deux méthodes précédentes permettent évidemment de construire les points sur les contours apparents.

Le plan méridien perpendiculaire au plan sécant est un *plan de symétrie* pour les deux surfaces, donc pour leur intersection. Sa trace horizontale est un axe de symétrie pour la projection horizontale. En lui appliquant la méthode indiquée ci-dessus, on obtient des sommets en projection horizontale et, en projection verticale, les points les plus hauts et les plus bas. (La tangente en chacun de ces points dans l'espace est perpendiculaire au plan méridien.)

Si la surface est une quadrique, le deuxième axe de la section est l'horizontale du plan sécant qui passe par le milieu des deux points précédemment obtenus. C'est aussi le deuxième axe en projection horizontale. On obtient ses extrémités en coupant par le plan horizontal qui le contient. En projection verticale, on a ainsi deux diamètres conjugués.

Les *asymptotes* peuvent être construites en remplaçant la surface par ses cônes asymptotes (nº 9), qui sont toujours de révolution et qui sont engendrés, par exemple, par les asymptotes de la méridienne.

63. Intersection d'une droite et d'une surface de révolution. — Si la surface est quelconque, le problème ne peut être résolu que dans les deux cas particuliers suivants :

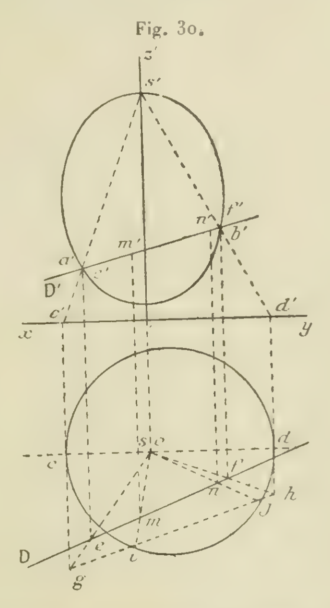
I. *La droite est perpendiculaire à l'axe.* — On coupe par le plan perpendiculaire à l'axe mené par cette droite. Si l'axe est vertical, les constructions sont évidentes et très simples. S'il est oblique sur les deux plans de projection, il faut utiliser une sphère contenant le parallèle de section par le plan auxiliaire précédent et l'on est ramené à chercher l'intersection de la droite proposée avec cette sphère.

II. *La droite rencontre l'axe.* — On coupe par le plan méridien

qui la contient. La construction n'est facile que si l'axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection, auquel cas on fait une rotation.

64. *Cas d'une quadrique.* — Soit, par exemple, un ellipsoïde de révolution à axe vertical, dont nous voulons l'intersection avec la droite (D, D'). Coupons par le plan projetant verticalement cette droite. La section de l'ellipsoïde est une ellipse E, dont il faut prendre l'intersection avec la droite. A cet effet, employons l'artifice suivant. Prenons comme surface auxiliaire le cône ayant pour base l'ellipse et pour sommet le sommet (s, s') de l'ellipsoïde.

Fig. 30.



Ce cône possède la propriété avantageuse d'avoir ses sections horizontales circulaires. En effet, il coupe l'ellipsoïde suivant une première conique, donc suivant une seconde. D'autre part, le sommet (s, s') est un point double de l'intersection ; comme il n'appartient pas à la première conique, c'est nécessairement un point double de la seconde. Donc, celle-ci se décompose en deux droites, qui ne peuvent être que la section de l'ellipsoïde par le plan tangent en (s, s'). Or, les sections horizontales de l'ellipsoïde sont des cercles ; les deux droites ci-dessus sont donc des droites isotropes. Le cône étant coupé suivant un cercle de rayon nul par le plan horizontal de son sommet, toutes ses sections horizontales sont circulaires. (*Cf.* t. II, Chap. XXXII ; Exercice proposé n° 6.)

Construisons une quelconque de ces sections, en coupant, par exemple, par le plan $c'd'$. Le plan de front de l'axe étant un plan de symétrie, il suffit de

construire les traces des génératrices situées dans ce plan pour avoir, en cd, un diamètre du cercle cherché.

Nous n'avons plus maintenant qu'à prendre l'intersection de notre cône avec la droite (D, D'), ce qui se fait par la méthode habituelle (n° 25). Nous construisons la trace horizontale gh du plan $(sD, s'D')$; nous prenons ses points de rencontre i, j avec le cercle; nous joignons si, sj et nous avons, en (m, m') et (n, n'), les points cherchés.

Cette méthode n'est applicable qu'à la condition que la quadrique soit rencontrée en des points réels par son axe. Le seul cas où il n'en est pas ainsi est celui de l'hyperboloïde à une nappe. Mais, nous indiquerons une méthode spéciale pour cette surface au n° 81.

Faisons encore observer que, dans le cas du paraboloïde, si l'on prend s' à l'infini, la méthode revient à utiliser la projection horizontale circulaire de l'ellipse E.

65. **Intersection d'une surface de révolution avec un cône ou un cylindre.** — Bornons-nous au cas où l'axe est, par exemple, vertical, la base du cône étant, en outre, donnée dans le plan horizontal.

La méthode générale pour construire un point quelconque consiste à couper par un cône auxiliaire ayant même sommet que le proposé et admettant pour base un parallèle quelconque de la surface. On prend l'intersection des deux cônes, en se servant de leurs bases dans le plan horizontal et l'on prend les points de rencontre des génératrices obtenues avec le parallèle.

Il revient au même de dire que l'on coupe par des plans horizontaux, en faisant une projection conique des sections auxiliaires obtenues. Si la base du cône proposé est circulaire, on peut d'ailleurs éviter, si l'on veut, cette projection conique et faire la projection orthogonale habituelle. Mais, cela n'est pas avantageux, car il faut, chaque fois, construire deux cercles au lieu d'un.

La tangente au point courant se construit par l'intersection des plans tangents.

Les *cônes* auxiliaires *limites* sont ceux qui sont tangents au proposé. Leur détermination est généralement impossible.

Les *points sur les contours apparents* du cône ne peuvent être construits que si les génératrices de contour apparent satisfont aux conditions particulières indiquées au n° 63 ou bien si la surface de révolution est une quadrique. Les points sur le contour apparent horizontal de la surface de révolution sont, au contraire, toujours donnés par la méthode générale exposée ci-dessus, en prenant les

parallèles qui constituent ce contour apparent. Quant aux points sur le contour apparent vertical, on ne peut pas, en général, les construire directement, car la section du cône par le plan méridien de front est une courbe quelconque, dont on ne saurait construire les points de rencontre avec la méridienne principale.

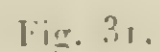
Cas particuliers. — I. *Le sommet du cône est sur l'axe.* — Outre la méthode générale précédente, on peut couper par les plans méridiens, en faisant une rotation. On peut ainsi construire les points sur les contours apparents du cône et sur le contour apparent vertical de la surface.

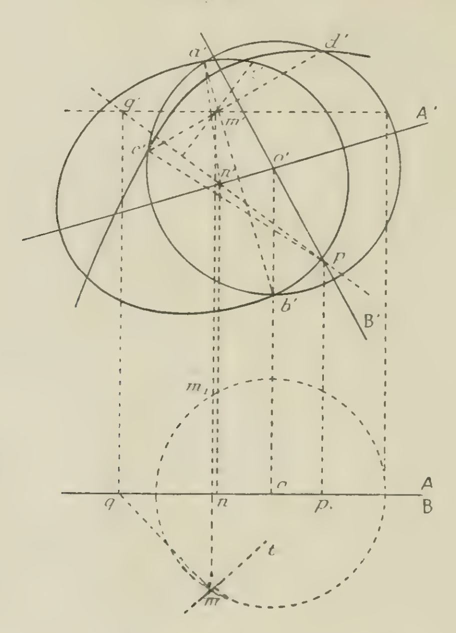
II. *Cylindre à génératrices perpendiculaires à l'axe.* — La méthode générale exposée plus haut est évidemment en défaut. Mais, il est alors très simple de couper par les plans des parallèles, puisque ceux-ci coupent le cylindre suivant des génératrices.

66. **Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.** — La méthode générale pour construire un point quelconque consiste à *couper par une sphère quelconque ayant pour centre le point de rencontre des deux axes*. On obtient un certain nombre de parallèles sur chaque surface et l'on prend les intersections de ces parallèles deux à deux. Pour construire les points de rencontre de deux parallèles, on prend l'intersection de leurs plans et l'on construit les deux points de rencontre de cette droite avec la sphère auxiliaire. Les points ainsi obtenus sont évidemment symétriques par rapport au plan des deux axes, lequel est donc un *plan de symétrie de la courbe*, comme cela est, du reste, évident *a priori*, puisqu'il est plan de symétrie pour chaque surface.

Les constructions ne sont simples que si le plan des axes est parallèle à l'un des plans de projection. Supposons-le, par exemple, de front. Soient (A, A') et (B, B') les deux axes et donnons-nous chaque surface par sa méridienne principale. Coupons par une sphère de centre (o, o'). Nous obtenons des parallèles dont les plans sont de bout. Soient, par exemple, $a'b'$ et $c'd'$ les projections verticales de deux d'entre eux. Leurs plans se coupent suivant une droite de bout, de trace m'. Nous prenons l'intersection de cette droite avec la sphère, en coupant par un plan horizontal; nous obtenons ainsi deux points de la courbe d'intersection (m, m') et (m_1, m').

Pour *construire la tangente* en (m, m'), le plus simple est d'employer la méthode des normales, car on a immédiatement les normales $(mn, m'n')$ et $(mp, m'p')$ aux deux surfaces. Il ne reste qu'à mener une perpendiculaire à leur plan. La droite $(np, n'p')$ est une frontale de ce plan : donc, la tangente en m' à la projection verticale est perpendiculaire à $n'p'$. Coupons maintenant le plan des normales


Fig. 31.



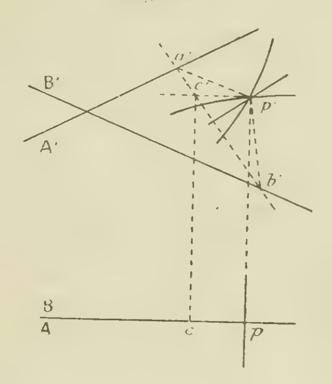
par le plan horizontal qui passe par m' ; nous obtenons le point (q, q') sur la droite $(np, n'p')$ et la droite $(mq, m'q')$ est une horizontale du plan normal ; la tangente en m à la projection horizontale est donc perpendiculaire à mq.

Sphères limites. — Pour qu'une sphère auxiliaire donne des points, il faut qu'elle coupe chaque surface. Les *sphères limites* sont celles qui sont inscrites dans l'une ou l'autre des deux surfaces. Si, par exemple, nous abaissons la normale $o'g'$ sur la méridienne de la surface (A), la sphère de rayon $o'g'$ est limite pour cette surface. Les parallèles suivant lesquels elle coupe (B) sont tangents à la courbe d'intersection, d'après le théorème des surfaces limites (n° **7**). En

projection verticale, on obtient, de la sorte, les points où la tangente est perpendiculaire à B'.

67. **Points sur les contours apparents.** — On ne peut pas, en général, construire les points sur les contours apparents horizontaux. Il n'y a exception que si l'un des axes est vertical, auquel cas on prend les sphères auxiliaires passant par les parallèles maxima et minima de la surface correspondante. Signalons aussi le cas où les deux surfaces sont des quadriques. Le contour apparent de chacune

Fig. 32.



d'elles se projette verticalement suivant une droite, trace du plan diamétral conjugué des cordes verticales; il suffit de construire les points d'intersection de cette droite avec la conique suivant laquelle se projette verticalement la courbe d'intersection.

Les points sur les contours apparents verticaux sont les points de rencontre des méridiennes principales. (Il peut aussi y avoir des points sur des parallèles à plan tangent perpendiculaire à l'axe: on les obtient au moyen des sphères auxiliaires passant par ces parallèles.) Soit p' l'un de ces points. Cherchons sa tangente. Dans l'espace, cette tangente est de bout, puisque les plans tangents aux deux surfaces sont de bout. En projection horizontale, il n'y a pas de difficulté; la tangente en p est perpendiculaire à la ligne de terre et le point p est un sommet de la projection horizontale. En projection verticale, nous savons qu'il faut prendre la trace du plan osculateur (n° I), le point p' devant, en outre, être un point de rebroussement. En réalité, on n'a pas, à proprement parler, un point de rebrousse-

ment; mais, tous les points de la projection verticale peuvent être considérés comme tels, ainsi qu'on le verra au n° 68. La tangente en p' n'en est pas moins donnée par la trace verticale du plan osculateur de la courbe de l'espace. On obtient aisément ce dernier au moyen du théorème de Meusnier (t. II, n° 335). Le centre de courbure normale pour chaque surface est le point de rencontre de la normale avec l'axe (t. II, n° 363). Il en résulte que le plan osculateur cherché est perpendiculaire à la frontale $a'b'$, donc aussi la tangente en p'. On retrouve tout simplement la règle pour construire la tangente en un point quelconque de la projection verticale, ce qu'on aurait d'ailleurs pu prévoir, par raison de continuité.

On peut aisément déduire des raisonnements qui précèdent la construction du centre de courbure en p à la projection horizontale. En effet, l'axe de courbure de la courbe de l'espace est la droite $(ab, a'b')$. Il rencontre la normale en (p, p') au cylindre projetant horizontalement la courbe au point (c, c'), qui est donc le centre de courbure normale de ce cylindre, c'est-à-dire le centre de courbure de sa section droite. Il s'ensuit que le centre de courbure cherché n'est autre que le point c.

68. **Branches virtuelles de la projection verticale.** — La courbe de l'espace admettant le plan de front des axes pour plan de symétrie, la projection verticale peut admettre des branches virtuelles (n° 10). Si, dans l'application de la méthode générale, le point m' se trouve en dehors du contour apparent vertical de la sphère auxiliaire, il appartient à une telle branche, car les deux points de la courbe dont il est la projection verticale sont imaginaires conjugués. Le cas limite est celui où ces deux points sont confondus. Ceci arrive lorsque le point m' est un des points de rencontre des méridiennes principales, de sorte que ces points sont les points limites des branches virtuelles.

Dans le cas où les deux surfaces sont des quadriques, on peut aisément, par l'application de la méthode générale du n° 10, construire les asymptotes de ces branches. Pour avoir les plans de sections homothétiques, on inscrit une sphère dans une des surfaces et l'on circonscrit à cette sphère une quadrique homothétique à l'autre surface. On a alors deux quadriques circonscrites à une même troisième et se coupant, par conséquent, suivant deux coniques. Les plans de

ces deux coniques sont les directions de plans cherchées; leurs traces verticales sont les directions asymptotiques de la projection verticale (laquelle est, comme on sait, une conique, puisque, d'une manière générale, le degré de la projection verticale est la moitié du degré de la courbe de l'espace). Pratiquement, on trace un cercle bitangent à l'une des coniques méridiennes principales, la corde de contact étant perpendiculaire à l'axe de la surface. Par exemple, on prend le cercle décrit sur l'axe de l'équateur comme diamètre. Puis, on construit une conique homothétique à l'autre méridienne et bitangente à ce cercle, la corde de contact étant perpendiculaire à l'axe de la seconde surface. Les sécantes communes, qui se coupent au point de rencontre des deux cordes de contact ([1]), sont les directions asymptotiques cherchées. (Rappelons qu'elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux cordes de contact; t. II, n° 492.)

Lorsqu'une des surfaces est un hyperboloïde, on peut prendre son cône des directions asymptotiques comme quadrique homothétique. Il suffit alors, dans la construction précédente, de prendre comme seconde conique deux tangentes au cercle parallèles aux asymptotes de la méridienne de l'hyperboloïde et se coupant sur le diamètre parallèle à l'axe.

Si l'une des surfaces est un paraboloïde, on peut prendre comme surface homothétique un cylindre de révolution parallèle à l'axe et, par suite, comme seconde conique, les deux tangentes au cercle parallèles à cet axe.

Une fois connues les directions asymptotiques, on a les asymptotes comme il a été expliqué au n° 10.

69. **Extension de la méthode des sphères auxiliaires.** — La méthode indiquée au n° 66 pour construire un point quelconque peut être appliquée toutes les fois qu'on peut trouver une infinité de sphères coupant chacune des surfaces dont on veut construire l'intersection suivant un cercle variable. (Les surfaces ne sont plus nécessairement de révolution.)

Par exemple, supposons que l'on ait affaire à un tore et à une

---

([1]) On peut en conclure que les directions asymptotiques sont confondues, c'est-à-dire que *la projection verticale est une parabole, lorsque les axes des deux surfaces sont parallèles* et dans ce cas seulement.

surface de révolution quelconque ayant son axe n'importe où dans le plan de l'équateur du tore. Prenons un cercle méridien quelconque du tore et considérons la sphère qui passe par ce cercle et qui a son centre sur l'axe de la seconde surface. Cette sphère coupe la seconde surface suivant des parallèles, qui rencontrent le cercle méridien du tore en des points de l'intersection.

De même, si l'on a affaire à deux tores ayant en commun un cercle méridien, on pourra couper par une sphère variable passant par ce cercle. Elle coupera chaque tore suivant un deuxième cercle méridien et les deux cercles ainsi obtenus se rencontreront en deux points variables de l'intersection.

CHAPITRE VI.

SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION.

70. **Généralités.** — On appelle *surface gauche de révolution* la surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe qui ne la rencontre pas.

C'est à la fois une surface de révolution et une surface réglée; elle participe, par conséquent, à la fois aux propriétés particulières de ces deux catégories de surfaces.

Nous avons vu (t. II, n° 556) que c'est aussi un *hyperboloïde à une nappe* et nous le vérifierons, du reste, élémentairement, en cherchant la méridienne principale (n° 74).

Il en résulte que la surface possède toutes les propriétés des quadriques réglées (t. II, n° 447).

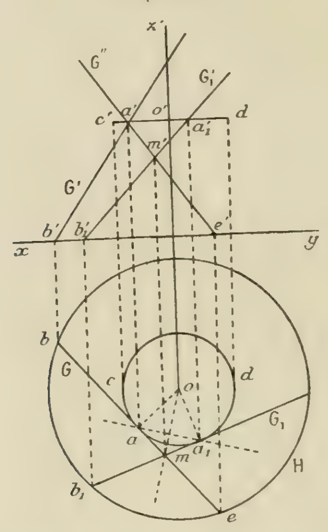
Supposons, pour simplifier, l'axe vertical, soit $(o, o'z')$. Soit (G, G') la droite génératrice. On a toutes les génératrices du même système, en la faisant tourner autour de l'axe d'un angle variable. C'est là un problème de Géométrie descriptive élémentaire. On facilite les constructions par la considération du *cercle de gorge*, c'est-à-dire du parallèle minimum. Ce cercle est décrit par le pied de la perpendiculaire commune à l'axe et à (G, G'). Comme l'axe est vertical, cette perpendiculaire se projette horizontalement suivant la perpendiculaire abaissée de o sur G, soit oa. Le point a se relève ensuite en a', sur G'. Dans la rotation, (a, a') décrit un cercle projeté horizontalement en vraie grandeur, suivant le cercle de centre o et de rayon oa et verticalement suivant le segment horizontal $c'd'$.

La trace horizontale (b, b') de (G, G') décrit un cercle de centre o et de rayon ob, qui constitue la *trace horizontale* H de la surface.

Au moyen de ces deux cercles, il est facile de construire rapidement une génératrice quelconque (G_1, G_1') du premier système. D'abord, G_1, de même que G, est tangente à la projection horizon-

tale du cercle de gorge (ce qui ne veut pas dire, bien entendu, que la génératrice soit tangente au cercle de gorge dans l'espace). Le point de contact a_1 se relève en a'_1, sur $c'd'$. La trace horizontale b_1 est un des deux points de rencontre de G_1 avec H. On le choisit, en remarquant que, dans la rotation, le sens positif défini, sur le cercle de

Fig. 33.



gorge, par la demi-tangente ab (t. II, n° 11), doit toujours rester le même. Cela fixe dès lors, le sens de $a_1 b_1$ et, par suite, le choix de b_1. Ayant b_1, on le relève en b'_1 sur la ligne de terre [1]. En joignant $a'_1 b'_1$, on a G'_1.

71. Les *génératrices du second système* peuvent être définies comme symétriques des génératrices du premier système par rapport aux plans méridiens. Prenons, par exemple, la symétrique de (G, G') par rapport au plan méridien oa. Le point (a, a') ne change pas; quant au point (b, b'), il est remplacé par (e, e'), de sorte que (G, G'') est une génératrice du second système.

On voit qu'on peut distinguer les deux systèmes, sur la projection horizontale, par le sens de la demi-tangente au cercle de gorge

[1] On peut évidemment faire jouer à un parallèle quelconque autre que le cercle de gorge le rôle du parallèle H.

orientée du point de contact vers la trace horizontale. Cette demi-tangente définit deux sens de rotation opposés sur le cercle de gorge, suivant que la génératrice considérée appartient au premier ou au second système.

72. Il est facile de vérifier, sur les constructions ci-dessus, les propriétés fondamentales des deux systèmes de génératrices (t. II, n° 447).

Théorème I. — *Deux génératrices de même système ne sont pas dans un même plan.*

Car si les génératrices (G, G') et (G_1, G'_1), par exemple, étaient dans un même plan, les droites aa_1 et bb_1, qui joignent des points de même cote, seraient parallèles. Or, cela est impossible, car elles font entre elles un angle égal à aoa_1.

Théorème II. — *Deux génératrices de systèmes différents sont dans un même plan.*

Les génératrices (G, G'') et (G_1, G'_1) sont dans un même plan, car les droites aa_1 et cb_1, qui joignent des points de même cote, sont parallèles. (Les segments a_1b_1 et ae sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite om; donc, aa_1 et cb_1 sont perpendiculaires à cette droite et, par suite, parallèles.)

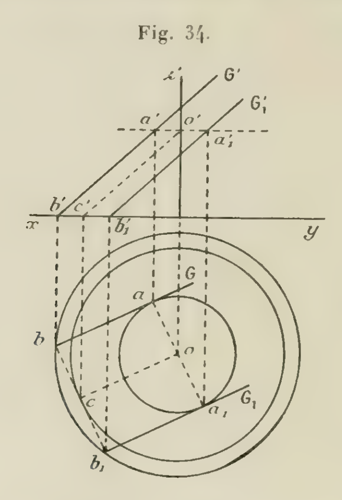
Les deux génératrices, étant dans un même plan, se rencontrent au point (m, m'). Le *plan tangent* en ce point à la surface est le plan des deux génératrices. Sa trace sur le plan du cercle de gorge est la droite $(aa_1, a'a'_1)$, dont la projection horizontale est la polaire de m par rapport à la projection horizontale du cercle de gorge.

Théorème III. — *Tout plan passant par une génératrice est tangent à la surface.*

Donnons-nous un plan quelconque passant par (G, G'') au moyen de sa trace sur le plan du cercle de gorge, soit aa_1. Cette trace rencontre le cercle de gorge au point (a_1, a'_1). Menons la génératrice (G_1, G'_1) qui passe par ce point et qui est de système différent de (G, G''); elle rencontre (G, G'') en (m, m') et le plan donné est tangent à la surface en ce point.

73. Plans et cône asymptotes. — Le plan tangent au point à l'infini sur (G, G′) ou plan asymptote est déterminé par la génératrice proposée et par la *génératrice parallèle* (G_1, G'_1). (On mène G_1 tangente au cercle de gorge et parallèle à G; puis, on choisit la trace horizontale b_1, de manière que les deux génératrices soient de systèmes différents; ou bien, on mène, par a'_1, G'_1 parallèle à G′.)

Fig. 34.



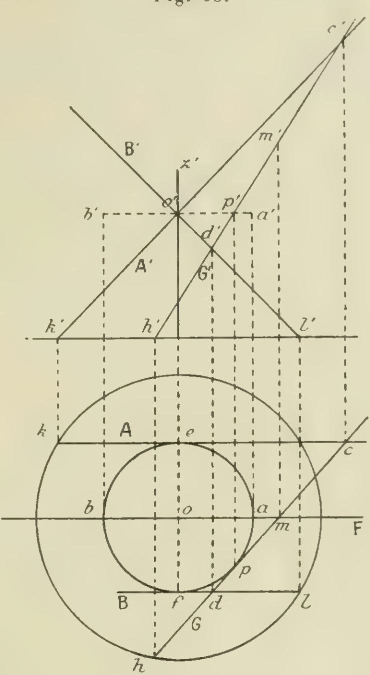
La trace de ce plan sur le plan du cercle de gorge est le diamètre aa_1. Donc, le plan asymptote passe par le centre (o, o') de la surface.

La trace horizontale du même plan est bb_1 parallèle à aa_1. Quand la génératrice proposée décrit la surface, le plan asymptote enveloppe un cône de sommet (o, o') et dont la base, dans le plan horizontal, est le cercle de centre o et de rayon oc, enveloppé par bb_1. Ce cône est le *cône asymptote* de la surface. Sa génératrice de contact avec le plan asymptote est la droite (oc, $o'c'$) équidistante des deux génératrices parallèles (G, G′) et (G_1, G'_1).

74. Méridienne principale. — Nous savons que cette méridienne est une hyperbole de centre o' et d'axe non transverse $o'z$. Ses asymptotes sont les génératrices de front A′ et B′ du cône asymptote. Enfin, ses sommets sont les extrémités a' et b' du diamètre de front du cercle de gorge.

Il est aisé de vérifier tout cela par des considérations élémentaires. Construisons un point quelconque (m, m') de la méridienne principale, en prenant la trace d'une génératrice quelconque (G, G') sur le plan méridien de front F. Considérons, d'autre part, les génératrices de front (A, A') et (B, B') qui sont

Fig. 35.



du système différent de (G, G'). Elle rencontrent cette dernière en (c, c') et (d, d'). Le point m étant au milieu de cd, m' est au milieu de $c'd'$. Il nous suffit, dès lors, de prouver que le produit $o'c'.o'd'$ est constant, car ce produit est le quadruple du produit des coordonnées de m', rapporté aux axes A' et B'. Or, si α désigne l'angle des génératrices avec l'axe de la surface, on a

$$o'c' = \frac{ec}{\sin\alpha}, \qquad o'd' = \frac{fd}{\sin\alpha}, \qquad o'c'.o'd' = \frac{ec.fd}{\sin^2\alpha}.$$

D'autre part, les longueurs ec et df sont respectivement égales à cp et à dp; donc, le produit $ec.fd$ est égal, au signe près, à $pc.pd$; il est donc égal à $\overline{op}^2$. Finalement, $o'c'.o'd' = \left(\frac{op}{\sin\alpha}\right)^2$; il est constant et le lieu de m' est bien une hyperbole admettant A' et B' pour asymptotes.

Le point m' étant au milieu de $c'd'$, cette dernière droite est,

comme on sait (t. II, n° 541), la tangente en m'. De sorte que *la méridienne principale est l'enveloppe des projections verticales des génératrices.* Ceci est, d'ailleurs, un cas particulier d'une proposition plus générale (t. II, n° 369), si l'on observe que ladite méridienne est le contour apparent vertical de la surface.

De même, le contour apparent horizontal, qui est le cercle de gorge (n° 50), est, nous l'avons vu (n° 70), l'enveloppe des projections horizontales des génératrices.

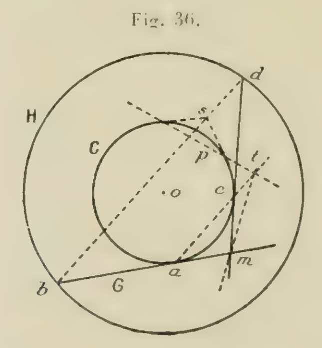
75. **Problèmes sur les plans tangents.** — Tous les problèmes sur les plans tangents peuvent être résolus par les méthodes générales exposées aux n°s 53 à 61. Mais, on peut aussi les résoudre par des méthodes particulières, basées sur l'emploi des génératrices.

Problème I. — *Construire la courbe de contact du cône circonscrit à partir d'un point donné* (s, s').

Pour avoir un point quelconque de cette courbe, on l'assujettit à se trouver sur une génératrice donnée quelconque (G, G').

Bornons-nous à faire les constructions en projection horizontale, les projections verticales s'en déduisant par le moyen des lignes de rappel. Nous nous donnons la surface par son cercle de gorge C et sa trace H sur le plan horizontal du point donné s [1].

Fig. 36.



Le point cherché se trouve à l'intersection de G avec la génératrice

(1) Ceci exclut le cas où ce point se trouve dans le plan du cercle de gorge. Mais, dans ce cas, le plan de la courbe de contact est évidemment vertical et la projection horizontale de la courbe se fait sur la polaire de s par rapport à la projection du cercle de gorge.

de système différent située dans le plan (S, G). Pour construire cette seconde génératrice, cherchons le point où elle rencontre le cercle de gorge. A cet effet, nous prenons la trace du plan (S, G) sur le plan de ce cercle. Cette trace passe d'abord par la trace *a* de G. Ensuite, elle est parallèle à *sb*, trace de (S, G) sur le plan de H. Elle coupe C en *c* et la tangente en ce point à C est la projection de la génératrice cherchée (c'est aussi la droite *cd*). Elle rencontre G en *m*, qui est le point demandé.

Cherchons la *tangente en ce point*. Elle se trouve à l'intersection du plan tangent avec le plan polaire de S. Coupons ces deux plans par le plan de gorge. La trace du plan tangent est *ac*. La trace du plan polaire est la polaire *p* de *s* par rapport à C. En effet, cette trace se trouve dans les plans polaires de S et du point à l'infini dans la direction verticale ; c'est donc la droite conjuguée de la verticale du point S (t. II, n° 436). Par suite, elle se trouve dans le plan polaire du point où cette verticale perce le plan de gorge ; or, ce plan polaire contient évidemment la droite *p*.

Les droites *ac* et *p* se rencontrent maintenant au point *t* (qui se rappellerait sur la projection verticale du cercle de gorge) et la droite *mt* est la tangente cherchée.

76. *Points remarquables*. — Nous avons d'abord les *sommets* situés sur *so*. On pourrait les construire par la méthode du méridien (n° 57). Mais, il est plus simple d'appliquer la méthode précédente, en prenant pour droite *bd* la perpendiculaire à *os*. Les tangentes à C issues du point *b*, par exemple, rencontrent *so* aux sommets cherchés *m* et *n*.

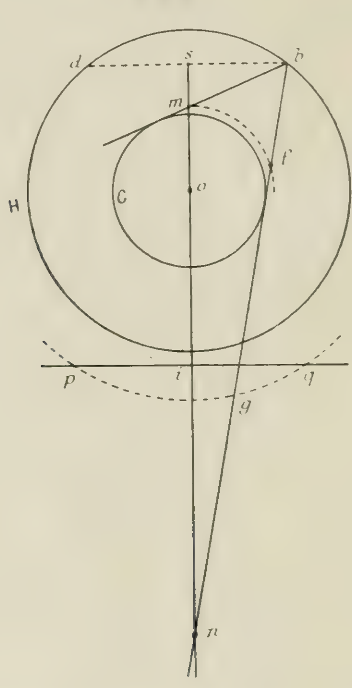
Le milieu *i* de *mn* est le centre de la projection horizontale de la conique de contact ; la perpendiculaire *pq* menée par ce point à *os* est le deuxième axe. Pour avoir les sommets correspondants, il suffit de couper par le plan horizontal équidistant des points M et N de l'espace. La section de la surface gauche est un parallèle, qui rencontre *bn* en un point *g* situé au milieu des points où cette génératrice rencontre les parallèles des points M et N. Le premier de ces deux points est *f*, obtenu en traçant le parallèle de *m* ; le second est *n*. Nous prenons maintenant le milieu *g* de *fn* et nous traçons le parallèle qui passe par ce point. Il coupe la droite *pq* aux deux sommets *p* et *q* cherchés.

Si l'on rappelle les quatre points *m*, *n*, *p*, *q* en projection verti-

cale, on obtient deux diamètres conjugués de cette projection (n° 61).

Les *points sur le contour apparent horizontal* sont les points de contact des tangentes à C menées par *s* (n° 2).

Fig. 37.



Les *points sur le contour apparent vertical* peuvent être obtenus par la méthode générale du méridien (n° 57). Il est plus simple de les construire au moyen des génératrices, en prenant *bd* perpendiculaire à la ligne de terre [1].

77. Problème II. — *Mener les plans tangents parallèles à un plan donné.* — Le problème revient évidemment à construire *les génératrices parallèles à ce plan* et à les associer deux à deux, en les prenant de systèmes différents. On obtient d'ailleurs les direc-

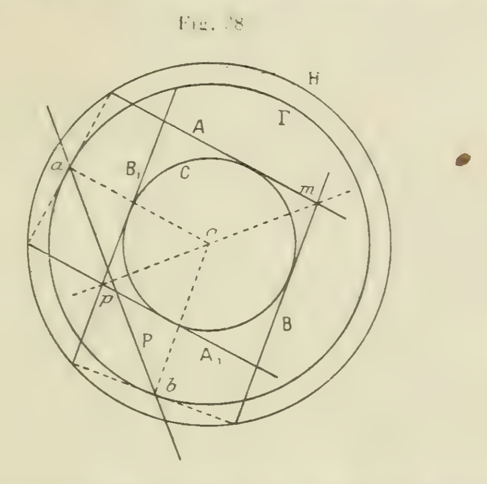
---

[1] D'une manière générale, on a les points sur un méridien donné en prenant *bd* perpendiculaire à ce méridien.

tions de ces génératrices en coupant le cône asymptote par un plan parallèle au plan donné mené par le sommet de ce cône.

La surface étant toujours déterminée par C et H, déterminons le plan donné par le centre o de la surface et par la droite P du plan de H. Construisons la trace Γ du cône asymptote et prenons ses deux points de rencontre a et b avec P. Les génératrices cherchées sont parallèles à oa et à ob. On a leurs projections A, A_1, B, B_1,

Fig. 78



en menant les tangentes à C parallèles à ces deux droites. En associant A et B d'une part, A_1 et B_1 d'autre part, on obtient, en m et p, les points de contact des plans demandés.

Faisons remarquer que ces points sont sur la perpendiculaire à P, menée par o, car ils sont dans le plan méridien perpendiculaire au plan donné.

78. Problème III. — *Mener les plans tangents passant par une droite donnée.*

On peut d'abord appliquer la méthode du n° 55. Si l'on veut, au contraire, utiliser les génératrices, on peut s'appuyer sur ce fait que les génératrices situées dans les plans demandés rencontrent la droite D donnée aux deux points d'intersection de cette droite avec la surface. Inversement, supposons ces deux points construits. Menons les deux génératrices qui passent par chacun d'eux. En associant ces quatre génératrices deux à deux, en les prenant dans

des systèmes différents, on a les plans demandés. On voit donc que le problème proposé revient à l'intersection d'une droite avec une surface gauche de révolution, problème qui sera résolu au n° 80.

79. **Section plane.** — Pour construire un point quelconque, on prend l'intersection d'une génératrice quelconque avec le plan sécant. On a la tangente en ce point, en menant la seconde génératrice qui en est issue et construisant l'intersection du plan de ces deux génératrices avec le plan sécant.

Dans la pratique, on cherche tout de suite les éléments de la section, comme il a été expliqué au n° 62. Observons seulement que pour avoir les sommets de l'axe situé dans le plan méridien de symétrie, on peut appliquer la méthode du cas III du n° 80; pour avoir les deux autres sommets (dans le cas de la section elliptique), on appliquera la méthode du cas II. Si la section est parabolique, on pourra construire le sommet, en appliquant la méthode du cas IV, puisque l'on connaît déjà un point d'intersection, à savoir le point à l'infini.

La construction des points sur le contour apparent horizontal est évidente. Pour avoir les points sur le contour apparent vertical, on peut procéder comme pour une surface de révolution quelconque, en utilisant la méridienne. On peut aussi construire, par la méthode du n° 80 (cas III), les points de rencontre de l'hyperboloïde avec la droite d'intersection du plan sécant et du plan de front de l'axe.

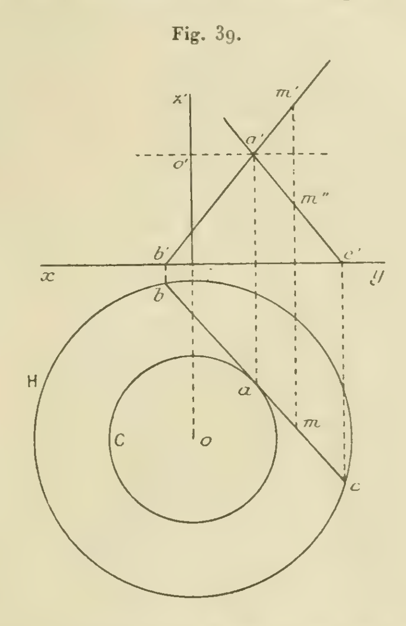
80. **Intersection avec une droite.** — Nous allons d'abord examiner plusieurs cas particuliers où la construction est simple.

I. *La droite est parallèle à l'axe.* — Si nous supposons toujours l'axe vertical, cela revient à chercher la projection verticale d'un point de la surface, connaissant sa projection horizontale m. On pourrait utiliser le parallèle qui passe par ce point, comme dans le cas d'une surface de révolution quelconque (n° 48). On peut aussi construire une des génératrices qui passent par le point cherché. Sa projection horizontale est une tangente ma menée de m à la projection du cercle de gorge. Elle rencontre le cercle H en deux points b et c, qui se rappellent en b' et c' sur la ligne de terre. Les droites $a'b'$ et $a'c'$ constituent les projections verticales des deux génératrices

projetées horizontalement en *ma*. La ligne de rappel de *m* les rencontre en *m′* et *m″*, qui sont les projections verticales des points cherchés.

Remarquons que cette méthode revient à *couper la surface par un plan tangent au cercle de gorge mené par la droite donnée.*

Fig. 39.



Cette interprétation peut servir à résoudre le problème, lorsque l'axe a une position quelconque par rapport aux plans de projection.

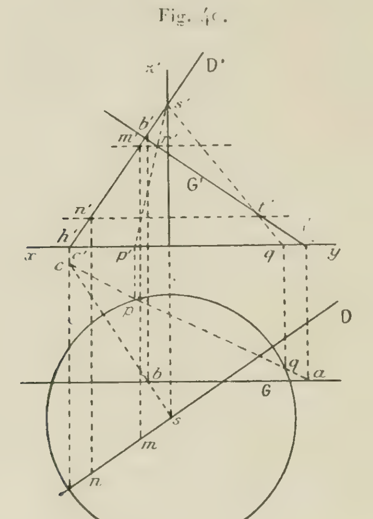
II. *La droite est perpendiculaire à l'axe.* — On coupe par le plan perpendiculaire à l'axe, comme pour une surface de révolution quelconque (n° 63). Bien entendu, pour déterminer le parallèle de section, on se sert du point de rencontre du plan auxiliaire avec une génératrice de la surface.

III. *La droite rencontre l'axe.* — *On coupe par le cône de révolution engendré par la droite en tournant autour de l'axe de la surface.* L'intersection se compose de deux parallèles, dont on prend les points de rencontre avec la droite. Pour avoir ces parallèles, on construit l'intersection d'une génératrice quelconque de

la surface avec le cône. Les parallèles qui passent par ces points sont les parallèles cherchés.

Faisons l'épure dans le cas où l'axe est vertical. Prenons la génératrice de front (G, G'), par exemple. Le plan (sG, s'G') a pour

Fig. 40.



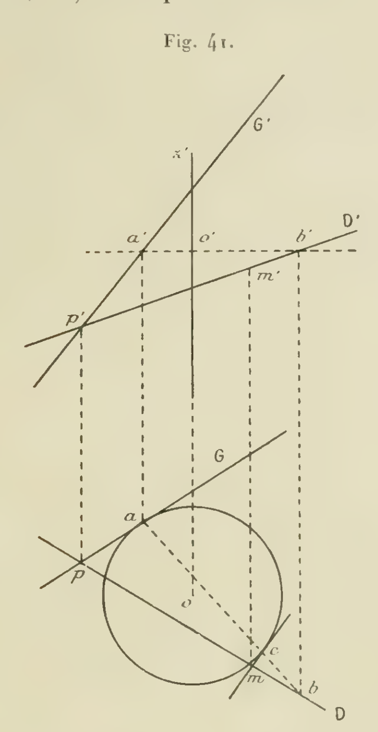
trace horizontale la droite ac. Cette trace rencontre la trace horizontale du cône auxiliaire aux deux points (p, p') et (q, q'). En joignant $s'p'$ et $s'q'$, on a, en r' et t', les projections verticales des points d'intersection de (G, G') avec le cône. En menant, par ces points, des horizontales, on a les projections verticales des parallèles cherchés. Elles rencontrent D' en m', n', qui se rappellent en m, n sur D. Les points (m, m') et (n, n') sont les points demandés.

IV. *La droite est quelconque; mais on connaît déjà un des points d'intersection.* — On construit l'une des génératrices qui passent par ce point, soit G. Puis, on coupe par le plan (D, G); on obtient une deuxième génératrice, qui rencontre D au second point d'intersection cherché.

Faisons encore l'épure, en supposant l'axe vertical. Soit (p, p') le point connu, situé sur la génératrice (G, G'). Nous prenons la trace (ab, $a'b'$) du plan (GD, G'D') sur le plan de gorge. La droite ab rencontre le cercle de gorge en c. Nous menons la tangente en ce

point à ce cercle; elle rencontre D en m, que nous rappelons en m', sur D′. Le point (m, m') est le point cherché.

Fig. 41.

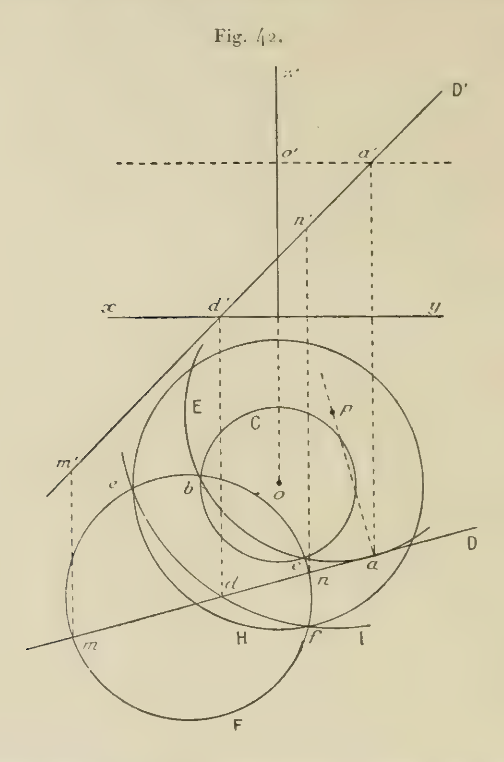


81. *Cas général.* — Nous indiquerons la *méthode* dite « de Rouché ». Coupons par la surface auxiliaire obtenue en faisant tourner la droite D autour d'un axe choisi de telle manière que les deux surfaces aient même plan de gorge. Leur intersection admet ce plan comme plan de symétrie et s'y projette, par conséquent, suivant une conique. Cette conique passe par les points de rencontre des deux cercles de gorge, donc, en particulier, par les points cycliques. C'est donc un cercle. Elle rencontre la projection de D aux projections des deux points demandés.

Faisons l'épure, en supposant toujours l'axe vertical. La droite (D, D′) perce le plan de gorge en (a, a'). La trace horizontale de l'axe de la surface auxiliaire doit se trouver sur la perpendiculaire menée par a à D; prenons-la, par exemple, en p, en nous arrangeant pour que le nouveau cercle de gorge E rencontre le premier en deux points réels b et c, qui sont déjà deux points du cercle F, suivant lequel se projette l'intersection des deux surfaces. Construisons ensuite deux autres points de ce cercle, en coupant les deux surfaces par un plan horizontal. Nous obtenons le cercle H dans la

surface donnée et le cercle I, de centre p et de rayon pd, dans la surface auxiliaire. Ces deux cercles se rencontrent en e et f. Nous traçons le

Fig. 42.



cercle F qui passe par b, c, e, f; il rencontre D en m, n, qui se rappellent en m', n' sur D'. Les points (m, m') et (n, n') sont les points cherchés.

82. Intersection avec une surface quelconque. — Pour construire l'intersection d'une surface gauche de révolution A avec une autre surface B, on peut considérer A soit comme une surface de révolution, en appliquant les méthodes du Chapitre précédent, soit comme une surface réglée, en prenant l'intersection des génératrices successives avec B. Par exemple, si B est un cône, on peut appliquer la méthode du n° 65; mais, on peut aussi couper par des plans auxiliaires passant par le sommet du cône et par les génératrices de A. De même, si les deux surfaces sont des hyperboloïdes ayant une génératrice commune, on coupera par un plan variable passant par cette génératrice.

82 *bis*. **Cas où l'axe est oblique.** — Lorsque l'axe de la surface est oblique sur les deux plans de projection, les diverses constructions étudiées dans ce Chapitre sont généralement beaucoup plus compliquées que dans le cas où l'axe est vertical ou de bout.

Le cercle de gorge doit alors être déterminé par son plan et par une sphère. Les constructions où intervient ce cercle se font par un rabattement ou par un changement de plan. Si, par exemple, l'axe est de front, il y a avantage à prendre le plan de gorge comme plan horizontal auxiliaire.

Le contour apparent horizontal est la section de la surface par le plan diamétral conjugué des cordes verticales. Pour déterminer ce plan, on peut remplacer l'hyperboloïde par son cône asymptote et l'on est ramené à chercher le plan des génératrices de contour apparent horizontal de ce cône. Ces génératrices sont, du reste, les asymptotes du contour apparent de l'hyperboloïde. Si elles sont réelles, c'est-à-dire si la verticale qui passe par le centre de la surface est extérieure au cône asymptote, le contour apparent est une hyperbole. Il est, au contraire, une ellipse, si la verticale ci-dessus est intérieure au cône asymptote. Enfin, si le cône asymptote admet une génératrice verticale, le contour apparent se réduit à deux points, qui sont les traces horizontales des deux génératrices verticales de la surface. (Les plans tangents verticaux sont, en effet, les plans qui passent par l'une ou l'autre de ces deux génératrices; leurs traces horizontales enveloppent donc les deux points ci-dessus.)

CHAPITRE VII.

QUADRIQUES QUELCONQUES.

83. **Hyperboloïde à une nappe.** — Le cas le plus intéressant au point de vue de la Géométrie descriptive est celui des *quadriques réglées*, grâce à l'emploi qu'on peut faire des génératrices rectilignes pour la résolution des divers problèmes. Nous allons commencer par étudier l'*hyperboloïde à une nappe*.

Une telle surface est entièrement déterminée par la connaissance de *trois génératrices de même système* G_1, G_2, G_3. Pour construire une génératrice quelconque G' du second système, on coupe par un plan quelconque P passant, par exemple, par G_1. Ce plan coupe G_2 et G_3 en deux points, qu'il suffit de joindre pour avoir la génératrice cherchée. On peut construire, de cette manière, trois génératrices du second système, soit G'_1, G'_2, G'_3. Puis, en leur appliquant la méthode précédente, on peut construire autant de génératrices que l'on veut du premier système.

Pour avoir un point quelconque de la surface, on prend un point quelconque sur une génératrice quelconque. On détermine le plan tangent en ce point par ladite génératrice et par la deuxième génératrice passant par le point. (Pour construire cette deuxième génératrice, on construit la droite qui passe par le point et qui s'appuie sur deux génératrices de l'autre système, ce qui est un problème élémentaire bien connu.)

Corrélativement, si l'on veut avoir le point de contact d'un plan mené par une génératrice, on prend l'intersection de celle-ci avec la génératrice du second système contenue dans le plan (laquelle est obtenue en joignant les points de rencontre du plan avec deux génératrices quelconques du premier système).

84. **Cône asymptote.** — On construit les génératrices parallèles

aux génératrices données G_1, G_2, G_3. Par exemple, la génératrice parallèle à G_1 s'obtient en menant par G_2 un plan parallèle à G_1 ; ce plan rencontre G_3 en un point qui appartient à la génératrice cherchée. Le plan de deux génératrices parallèles est, comme on sait, un plan asymptote, qui touche le cône asymptote suivant la droite équidistante des deux génératrices considérées. Quand on aura fait la construction indiquée au début de ce paragraphe, on possédera donc trois plans asymptotes et leurs génératrices de contact avec le cône asymptote, ce qui est plus que suffisant pour déterminer ce dernier. (Sa base dans un plan quelconque est déterminée par trois points et les tangentes en ces points.)

On peut observer que les six génératrices deux à deux parallèles dont il est question ci-dessus sont six arêtes d'un parallélépipède, dont les trois plans asymptotes précédents sont des plans diagonaux et dont le centre est aussi le centre de l'hyperboloïde.

85. **Contours apparents.** — Le contour apparent horizontal, par exemple, est l'enveloppe des projections horizontales des génératrices. Pour avoir le point de contact de la projection g de G, on construit la génératrice du second système contenue dans le plan vertical passant par G; cette génératrice rencontre G en un point, dont la projection horizontale est le point de contact cherché.

La courbe de contour apparent dans l'espace est la section de la surface par le plan diamétral conjugué des cordes verticales. Elle admet pour asymptotes les génératrices de contour apparent horizontal du cône asymptote. Suivant que ces génératrices sont réelles ou imaginaires, le contour apparent de l'hyperboloïde est une hyperbole ou une ellipse. Dans le cas intermédiaire où le cône asymptote a une génératrice verticale, l'hyperboloïde a deux génératrices verticales, dont les traces horizontales constituent le contour apparent (dégénérescence tangentielle; *cf.* t. II, n° 442). Toute courbe tracée sur la surface a une projection horizontale qui passe, en général, par ces deux points (elle passe par chacun d'eux un nombre de fois égal au nombre des points de rencontre de la courbe de l'espace avec la génératrice verticale qui se projette au point considéré), en y changeant de ponctuation. Il est assez difficile, dans ce cas particulier, de se représenter la surface en projection horizontale. Par contre, ce cas est avantageux au point de vue des constructions relatives aux géné-

ratrices, parce que, dans chaque système, les projections horizontales de ces droites passent par un point fixe, qui est la trace horizontale de la génératrice verticale appartenant à l'autre système.

86. **Problèmes relatifs aux plans tangents.** — Ils se résolvent, en principe, comme dans le cas de la surface gauche de révolution. L'exécution de l'épure seule diffère, car on n'a plus ni cercle de gorge, ni parallèles pour faciliter la construction des génératrices, lesquelles doivent être construites suivant les principes exposés au n° 83.

La courbe de contact du cône circonscrit à partir d'un point donné S se détermine par points, en cherchant le point de contact du plan passant par S et par une génératrice quelconque. On peut aussi se ramener à une section plane, en déterminant le plan polaire de S, ce qui peut se faire en construisant trois points de la courbe de contact par la méthode ci-dessus.

Pour construire les plans tangents parallèles à un plan donné, on cherche les génératrices parallèles à ce plan, en déterminant d'abord leurs directions par l'intersection du cône asymptote avec un plan mené par son sommet parallèlement au plan donné (*cf.* n° 77).

Pour mener les plans tangents par une droite donnée, on construit les génératrices issues des points de rencontre de cette droite avec la surface (n° 78).

87. **Sections planes.** — La construction d'un point courant est la même qu'au n° 79. Quant aux éléments de la section, ils ne sont faciles à déterminer que dans le cas de la section hyperbolique ; on construit, alors, les asymptotes, qui sont les mêmes que pour la section du cône asymptote par le même plan.

Si la section est elliptique, on peut chercher ses axes (dans l'espace ou en projection) en remarquant qu'ils sont encore les mêmes que pour la section du cône asymptote. La détermination des sommets se ramène ensuite à l'intersection d'une droite avec l'hyperboloïde (n° 88). On peut aussi se servir des sommets de la section du cône asymptote, en se rappelant que les deux sections sont homothétiques et concentriques. Dans tous les cas, les constructions sont compliquées. On peut encore construire deux diamètres conjugués, en remarquant qu'il est possible d'avoir les points de contact des tangentes à la section parallèles à une direction donnée, en prenant les points de

rencontre de la surface avec l'intersection du plan sécant et du plan diamétral conjugué de la direction considérée. Mais, cela non plus n'est pas simple.

Lorsque la section est parabolique, on peut se servir de la section du cône asymptote, en remarquant que les deux courbes peuvent se déduire l'une de l'autre par une translation parallèle à leur direction asymptotique commune. On peut aussi se borner à construire deux points et la tangente en l'un d'eux. On connaît alors chaque projection par un diamètre, la tangente à l'extrémité de ce diamètre et un point, ce qui suffit pour la construire pratiquement (n° 143).

88. **Intersection avec une droite.** — On est ramené à construire une droite s'appuyant sur quatre droites : G_1, G_2, G_3 et la droite D donnée. On peut résoudre ce problème de la manière suivante. Prenons un point P quelconque sur G_3, par exemple. Les plans (P, G_1) et (P, G_2) rencontrent D en deux points M et M', qui décrivent des divisions homographiques. Les points doubles de ces divisions sont les points d'intersection cherchés.

Dans le cas particulier où l'on connaît déjà un des points d'intersection, la construction est beaucoup plus simple. On peut, en effet, suivre la méthode indiquée pour le cas IV du n° 80.

89. **Paraboloïde hyperbolique.** — On peut encore le déterminer par trois génératrices de même système; mais alors, ces trois droites doivent être *parallèles à un même plan*. On peut en déduire toutes les génératrices des deux systèmes comme il a été expliqué au n° 83.

On peut aussi se donner deux génératrices d'un système et le plan directeur de l'autre système. (C'est le cas où la troisième génératrice est rejetée à l'infini.) Dans ce cas (auquel on peut évidemment toujours se ramener), on a une génératrice quelconque du second système en coupant les deux génératrices données par un plan quelconque parallèle au plan directeur et joignant les deux points de rencontre. La construction est particulièrement simple lorsque le plan directeur est parallèle à un plan de projection.

Les différents problèmes examinés précédemment se traitent de la même manière que dans le cas de l'hyperboloïde. Toutefois, il n'y a pas de cônes asymptotes, les plans asymptotes étant les plans parallèles aux plans directeurs. En outre, les contours apparents sont toujours des paraboles, puisque tout plan diamétral coupe la surface suivant une telle courbe. Dans le cas particulier où un plan directeur est perpendiculaire à un plan de projection, le contour apparent sur ce plan se réduit à un point. Si, par exemple, le premier plan directeur est vertical, parmi les génératrices du premier système se trouve

une génératrice verticale, dont la trace constitue le contour apparent horizontal (*cf.* n° 85). Toutes les génératrices du second système ont des projections horizontales qui passent par ce point et cela simplifie évidemment leur construction.

On peut aisément *construire le sommet et l'axe du paraboloïde.* La direction de cet axe est l'intersection des plans directeurs. Le plan tangent au sommet est le plan tangent perpendiculaire à cette direction. Comme on sait (n° 86) mener le plan tangent parallèle à un plan quelconque, on saura, en particulier, mener celui-là; son point de contact sera le sommet cherché. En menant par ce point la parallèle à l'intersection des plans directeurs, on aura l'axe.

90. **Intersection d'une quadrique réglée avec une surface quelconque.** — On peut construire cette intersection si l'on sait construire l'intersection de la surface avec une droite quelconque. On cherche alors ses points de rencontre avec les génératrices successives de la quadrique. Par exemple, si la surface est un cône, on coupe par un plan passant par le sommet du cône et par une génératrice quelconque de la quadrique (*cf.* n° 82). Si l'on a affaire à deux quadriques ayant une génératrice commune, on coupe par un plan variable contenant cette génératrice; on obtient, dans chaque surface, une génératrice de l'autre système; ces deux génératrices se rencontrent en un point de la courbe d'intersection. Cette courbe est, en général, une cubique gauche (abstraction faite de la génératrice commune). Les divers cas de dégénérescence ont été étudiés dans le Tome II (n° 491). Ses points de rencontre avec la génératrice commune sont les deux points de raccordement; on les construit comme points doubles de deux divisions homographiques (*cf.* Chap. VI, Exercice proposé n° 2). Dans le cas particulier où les surfaces se raccordent tout du long de la génératrice, on sait (t. II, n° 491) que le reste de l'intersection se compose de deux génératrices de l'autre système. Pour les construire, on peut chercher les deux points de rencontre d'une génératrice quelconque de l'une des surfaces avec l'autre, puis, mener, par chacun de ces points, la génératrice du second système de l'une quelconque des deux surfaces.

91. **Ellipsoïde.** — Bornons-nous à étudier le cas où *l'un des axes est vertical*, la surface étant déterminée par les deux sommets de cet axe et par

la projection horizontale de l'ellipse de section par le plan principal horizontal.

Le contour apparent horizontal n'est autre que cette ellipse. Quant au contour apparent vertical, c'est une ellipse obtenue en coupant la surface par le plan déterminé par l'axe vertical et les points de contact des tangentes de bout à l'ellipse principale horizontale. Les traces verticales de ces tangentes sont deux sommets du contour apparent cherché; les deux autres sommets sont ceux de l'axe vertical de l'ellipsoïde.

Intersection avec une surface susceptible d'être engendrée par des droites ou des cercles situés dans des plans horizontaux. — On coupe par ces plans. On obtient, chaque fois, dans l'ellipsoïde, une ellipse dont il faut prendre l'intersection avec la droite ou le cercle de l'autre surface. Pour éviter de construire chaque fois cette ellipse, on remarque qu'elle est homothétique de l'ellipse principale horizontale, dans un rapport qui est donné par l'intersection du plan sécant avec une des deux autres ellipses principales. On effectue alors, sur la projection horizontale de la droite ou du cercle, une homothétie inverse de la précédente; on prend les points d'intersection avec l'ellipse principale horizontale; puis, on effectue, sur ces points, l'homothétie directe qui ramène cette ellipse principale sur l'ellipse de section par le plan auxiliaire; on obtient ainsi des points de la courbe qu'il s'agit de construire (*cf.* n° 65).

Ce procédé peut s'appliquer, en particulier, pour construire une *section plane quelconque de l'ellipsoïde*. On obtient chaque fois deux points, dont le milieu décrit le diamètre conjugué des cordes horizontales de l'ellipse de section. On a les extrémités de ce diamètre en construisant son intersection avec l'ellipsoïde, comme il est expliqué plus loin. En coupant par le plan horizontal qui passe par le milieu de ce diamètre, on a, d'autre part, les extrémités du diamètre horizontal. On obtient finalement deux diamètres conjugués, ce qui permet de construire pratiquement les deux projections de la section.

On peut ramener à ce problème la construction de la *courbe de contact d'un cône circonscrit*, puisque cela revient à couper l'ellipsoïde par le plan polaire du sommet du cône. Pour avoir ce plan polaire, il suffit d'en construire trois points, qui seront, par exemple, les points de la courbe de contact situés sur les contours apparents, points qui se déterminent par l'application du théorème III du n° 2. On peut d'ailleurs aussi construire directement les points situés dans un plan horizontal quelconque. On remplace l'ellipsoïde par le cône circonscrit le long de la section par ce plan et l'on prend pour base de ce cône l'ellipse horizontale suivant laquelle il coupe le cylindre vertical circonscrit à l'ellipsoïde (*cf.* n° 55).

Intersection avec une droite quelconque. — On coupe par le plan projetant horizontalement la droite. La section de l'ellipsoïde par ce plan est une ellipse, dont on a très facilement les sommets. On construit son intersection avec la droite, en la rabattant sur le plan principal horizontal et se servant du cercle homographique (t. II, n° 539).

92. **Paraboloïde elliptique.** — Bornons-nous encore au cas où *l'axe est vertical*. La manière la plus simple de définir le paraboloïde consiste à se donner son sommet et une ellipse E de section par un plan horizontal.

Le contour apparent horizontal n'existe pas. Le contour apparent vertical est une parabole, ayant même sommet et même axe que le paraboloïde et dont on peut construire deux points en menant les tangentes de bout à l'ellipse E.

Tous les problèmes étudiés précédemment pour un ellipsoïde se traitent d'une manière analogue pour un paraboloïde elliptique. L'intersection avec une droite seule ne se construit pas de la même manière, parce que la section par le plan projetant horizontalement la droite est une parabole et non plus une ellipse. On pourrait évidemment construire les points de rencontre de la droite avec cette parabole, en faisant un rabattement et employant la méthode élémentaire bien connue, qui utilise le foyer et la directrice. Il nous paraît plus simple de procéder de la manière suivante.

Soient a et b les demi-grand axe et petit axe de l'ellipse E. Faisons la transformation homographique qui consiste à amplifier toutes les distances au plan projetant horizontalement le grand axe dans le rapport $\frac{a}{b}\cdot$ L'ellipse E devient un cercle et le paraboloïde devient un paraboloïde de révolution. On construit l'intersection de ce dernier avec la droite transformée de la droite proposée (n° 64). Puis, on fait, sur les points obtenus, la transformation inverse de la précédente.

93. **Hyperboloïde à deux nappes.** — On peut le définir par ses deux hyperboles principales ou bien par ses deux sommets et une section elliptique de plan perpendiculaire à l'axe joignant ces sommets.

Si cet axe est vertical, il n'y a pas de contour apparent horizontal et le contour apparent vertical est une hyperbole admettant pour sommets les sommets de la surface et pour asymptotes les génératrices de contour apparent vertical du cône asymptote, lesquelles peuvent être construites aisément, si l'on se rappelle que toute base horizontale de ce cône est une ellipse homothétique à l'ellipse donnée de l'hyperboloïde.

Si le plan horizontal est parallèle au plan d'une des hyperboles principales, cette hyperbole constitue le contour apparent horizontal. Le contour apparent vertical est une hyperbole, si le diamètre de bout de l'hyperbole précédente est un diamètre imaginaire. On en a encore les asymptotes par les génératrices de contour apparent vertical du cône asymptote. On a ses deux sommets en prenant les traces verticales des tangentes de bout de l'hyperbole principale horizontale.

Les différents problèmes étudiés à propos de l'ellipsoïde se résolvent d'une manière analogue dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes. Mais, au lieu de n'avoir à considérer que des sections elliptiques, on peut avoir affaire à des sections hyperboliques et même paraboliques, dans le problème de l'intersection avec une droite.

CHAPITRE VIII.

PROJECTIONS COTÉES ; SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

94. **Projections cotées.** — Le système des projections cotées consiste, comme on sait, à n'utiliser qu'un seul plan de projection, qui est un plan horizontal, et à définir chaque point de l'espace par sa projection et par sa cote.

On peut, avec ce système, résoudre les mêmes problèmes qu'en Géométrie descriptive. Les méthodes générales sont identiques ; l'exécution seule diffère. Les constructions de la Géométrie cotée se font ordinairement avec le secours de plans verticaux auxiliaires, choisis de manière à donner les constructions les plus simples et pouvant très bien varier plusieurs fois au cours d'un même problème. Il est clair que, dans ce cas, on retombe sur les méthodes de la Géométrie descriptive, avec cette seule particularité qu'on fait un emploi systématique des changements de plans et qu'on ne se préoccupe pas de construire les projections de tous les résultats sur un même plan vertical imposé à l'avance, ce qui est évidemment une simplification.

Il arrive aussi qu'on remplace certaines constructions par des calculs, dans lesquels on fait intervenir les cotes des différents points de la figure, en même temps que leurs distances horizontales.

En combinant ces deux manières de procéder, on peut, en particulier, résoudre tous les problèmes classiques sur la droite et le plan, avec une simplicité souvent plus grande qu'en Géométrie descriptive. Nous supposons que ces constructions élémentaires sont connues du lecteur.

On peut aussi aborder l'étude des surfaces courbes et reprendre toutes les questions étudiées dans les Chapitres précédents. Mais, si l'on peut y gagner au point de vue de la simplicité des constructions, il faut reconnaître que l'on aboutit à un résultat moins satisfaisant,

car, si l'on a affaire à une figure un peu compliquée, on se la représente beaucoup plus difficilement avec une seule projection qu'avec deux. C'est pourquoi la Géométrie descriptive continue à être employée, de préférence à la Géométrie cotée, sauf pour le cas, signalé plus haut, des constructions élémentaires sur la droite et le plan, ligne et surface pour lesquelles la difficulté de représentation n'existe pas. (Dans le dessin industriel, il arrive même fréquemment que deux projections sont jugées insuffisantes et qu'on leur en adjoint une troisième : plan, élévation, profil.)

95. **Surfaces topographiques.** — La véritable raison d'être du système des projections cotées est la représentation des *surfaces topographiques*.

Supposons que l'on veuille faire la carte d'une certaine région ou bien utiliser cette carte pour résoudre certains problèmes topographiques. On ne peut évidemment représenter avec exactitude la surface du sol, en tenant compte de tous ses détails (maisons, arbres, rochers, cailloux, grains de sable, etc.) (¹). On lui substitue alors une surface conventionnelle moyenne, qui en épouse les détails avec une précision plus ou moins grande, suivant l'échelle adoptée pour faire la carte (et aussi suivant la précision avec laquelle ont été faits la planimétrie et le nivellement de la région). Une telle surface porte le nom de *surface topographique*.

Elle n'est évidemment susceptible d'aucune définition géométrique. Pratiquement, elle est déterminée par la connaissance de quelques points, entre lesquels on interpole. Chacun de ces points est lui-même connu par sa projection horizontale (planimétrie) et par sa cote au-dessus d'un certain plan horizontal de référence (²) (nivellement). Le système des projections cotées semble dès lors tout indiqué pour la représenter.

Il serait au surplus extrêmement peu pratique de construire et

(¹) Il est même impossible de concevoir une telle surface, pour laquelle la notion courante de surface géométrique disparaît totalement. Sa forme se modifie, suivant l'échelle à laquelle on se place pour l'observer, par exemple, suivant qu'on la regarde du haut d'une montagne, ou bien en s'y promenant, ou bien au microscope. En aucun point, elle n'admet de plan tangent.

(²) Nous supposons la région considérée assez petite pour qu'on puisse négliger la courbure de la Terre. Pour ce qui concerne les différents modes de construction des cartes, *cf.* t. II, Chap. XXVIII, Exercices résolu n° 2 et proposés n°ˢ 5, 6, 7.

d'utiliser des cartes comportant deux projections, d'autant plus que la projection horizontale est de beaucoup la plus importante. En outre, la projection verticale, pour être lisible, devrait être construite à une échelle beaucoup plus grande que la projection horizontale, à cause de la petitesse des dénivellations comparativement aux distances horizontales.

Pour toutes ces raisons, le système des projections cotées s'impose dans la représentation des surfaces topographiques.

96. **Lignes de niveau, de plus grande pente, d'égale pente.** — Une surface topographique ne pouvant être définie géométriquement, il faudrait théoriquement, pour la déterminer, se donner la projection horizontale et la cote de chacun de ses points. Pratiquement, cela est impossible et d'ailleurs inutile et l'on se contente de représenter la surface par ses *lignes de niveau*. On appelle ainsi les sections de la surface par une série de plans horizontaux équidistants, dont les cotes au-dessus du niveau de la mer sont les multiples consécutifs d'un nombre entier de mètres, appelé *équidistance* et d'autant plus petit que l'échelle de la carte est plus grande. A côté de chaque ligne de niveau, on marque sa cote. (Pour rendre la carte plus lisible, on se contente souvent de marquer les cotes rondes, par exemple les multiples de 100^m, si l'équidistance est de 20^m.)

On appelle *ligne de plus grande pente* une ligne tracée sur la surface et qui, en chacun de ses points, a la pente maximum. En chaque point, la tangente est la ligne de plus grande pente du plan tangent, c'est-à-dire la perpendiculaire aux horizontales de ce plan; elle est donc perpendiculaire à la tangente à la ligne de niveau. Il suit de là que *les lignes de plus grande pente sont les trajectoires orthogonales des lignes de niveau*. Cette propriété se conserve d'ailleurs en projection horizontale, parce que les tangentes aux lignes de niveau sont horizontales. On peut en tirer la construction pratique de la ligne de plus grande pente issue d'un point donné A de la surface.

Supposons qu'on veuille la partie descendante de cette ligne (ce serait la trajectoire d'une goutte d'eau qui partirait de A). On abaisse de A la normale sur la ligne de niveau dont la cote est immédiatement inférieure à celle de A. Puis, du pied de cette normale, on abaisse une normale sur la ligne de niveau suivante et ainsi de suite. On joint tous les pieds par un trait continu et régulier et l'on a la projection

horizontale de la ligne demandée, avec une approximation d'autant plus grande que l'équidistance est plus petite.

On appelle *ligne d'égale pente* une ligne dont la pente est constante, c'est-à-dire dont toutes les tangentes sont également inclinées sur le plan horizontal.

On peut mener, par un point donné A, une ligne ayant une pente donnée p, à condition que cette pente soit au plus égale à la pente de la surface (c'est-à-dire du plan tangent) en ce point. Supposons, par exemple, qu'on veuille construire la partie descendante de cette ligne. On commence par évaluer la différence de cote z entre A et la ligne de niveau L immédiatement inférieure (en interpolant entre cette ligne et la ligne immédiatement supérieure, sur la ligne de plus grande pente, pour avoir l'exactitude maximum). On calcule ensuite, en tenant compte de l'échelle, la distance $\frac{z}{p}$. Du point A comme centre, avec un rayon égal à cette distance, on décrit une circonférence, qui rencontre L en deux points A′ et B′. (Ces points sont réels, parce que p est inférieure à la pente de la surface.) On choisit l'un d'eux, A′ par exemple, et l'on répète sur lui la construction que l'on vient de faire sur A (la distance z est alors égale à l'équidistance); on obtient ainsi deux points A″ et B″. On choisit celui qui se trouve, par rapport à la normale en A′ à L, du côté opposé à A (car la ligne cherchée doit évidemment traverser les lignes de plus grande pente). On continue de la sorte, tant que la construction est possible et l'on joint les points obtenus par un trait continu et régulier.

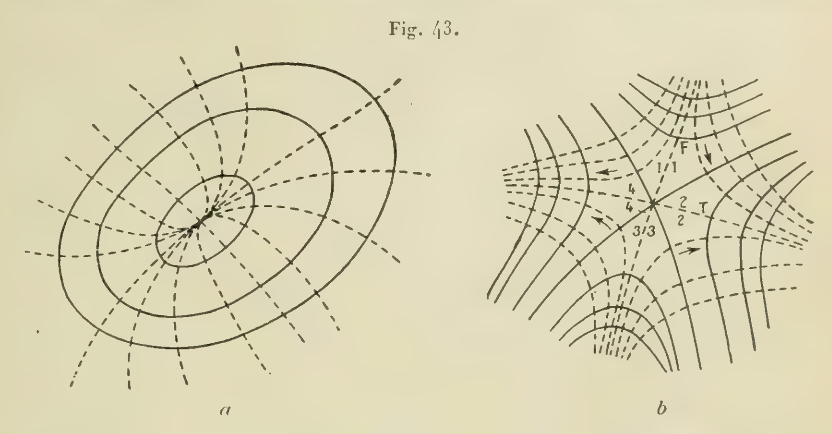
Il y a deux solutions, correspondant aux deux manières de choisir A′ après la première construction. Les tangentes en A à ces deux lignes sont les deux droites de pente p menées par A dans le plan tangent.

Lorsque la construction devient impossible, c'est-à-dire lorsque la circonférence ne rencontre plus la ligne de niveau à laquelle on veut aboutir, cela signifie qu'on est arrivé à la limite d'une région de la surface où la pente est supérieure à p, région dans laquelle on ne peut pénétrer. On doit alors rebrousser chemin, tangentiellement à une ligne de plus grande pente et remonter vers les altitudes qu'on vient de traverser.

97. **Sommets, fonds, cols.** — Ce sont tous les points de la surface où *le plan tangent est horizontal*.

Un tel point est un *sommet*, si la surface y est concave vers le bas (*cf.* t. II, n° 340). Les lignes de niveau de cotes infiniment voisines sont sensiblement des ellipses homothétiques à l'indicatrice d'Euler (t. II, n° 342). Elles ne sont, bien entendu, réelles que pour les cotes inférieures à celles du sommet, qui est une cote maximum. Pratiquement, les lignes de niveau au voisinage d'un sommet sont des lignes

Fig. 43.



fermées, (*fig.* 43, *a*) qui ne ressemblent que grossièrement à des ellipses (sauf pour la première, si la cote du sommet est très légèrement supérieure à une cote ronde), en raison de la grandeur de l'équidistance, qui est loin d'être infiniment petite. Ajoutons qu'elles sont très espacées horizontalement, car elles sont tracées dans une région de faible pente. (Il peut y avoir, bien entendu, des exceptions, par exemple si le sommet considéré est un pic très aigu, comme il arrive dans les régions montagneuses.) Sur les cartes, on marque chaque sommet par un point figurant sa projection horizontale et à côté duquel on inscrit la cote. Ce point doit tenir lieu de ligne de niveau pour toutes les constructions devant être effectuées à l'intérieur de la ligne de niveau de cote immédiatement inférieure.

Un point est un *fond*, si la surface y est concave vers le haut, c'est-à-dire si c'est un point de cote minimum. Tout ce qui vient d'être dit pour les sommets peut se répéter intégralement pour les fonds, avec cette seule différence que les cotes voisines sont supérieures, au lieu d'être plus petites.

Un *col* est un point à plan tangent horizontal, où la surface est à courbures opposées (t. II, n° 340). Sa cote n'est ni maximum ni

minimum. Dans son voisinage, les lignes de niveau sont sensiblement des hyperboles homothétiques à l'indicatrice d'Euler, ayant pour axe transverse l'une ou l'autre des tangentes principales, suivant qu'elles ont une cote supérieure ou inférieure à celle du col (*fig.* 43, *b*). Si le col est à cote ronde, la ligne de niveau correspondante l'admet comme point double. Dans les angles 1 et 3, par exemple, le terrain monte ; il descend, au contraire, dans les angles 2 et 4.

98. **Lignes de plus grande pente issues d'un sommet, d'un fond ou d'un col.** — Si l'on cherche à construire la ligne de plus grande pente issue d'un point A à plan tangent horizontal, on est tout de suite embarrassé, car on ne sait pas quelle est la tangente au point de départ, puisque toutes les tangentes en ce point ont même pente, à savoir une pente nulle. Effectivement, si l'on traite la question par le calcul, en supposant connue l'équation de la surface topographique, on constate que le point A est un point singulier pour l'équation différentielle des lignes de plus grande pente. On ne peut affirmer qu'il existe une seule intégrale passant par ce point, comme lorsqu'il s'agit d'un point quelconque (t. I, n° 186). Il est, au contraire, facile de montrer, sur un exemple, qu'une telle affirmation serait erronée.

Supposons que la surface soit un paraboloïde de sommet A ayant pour équation

$$z = ax^2 + by^2. \tag{1}$$

L'équation différentielle des lignes de plus grande pente est

$$a\frac{dy}{y} = b\frac{dx}{x},$$

dont l'intégrale générale est

$$y^a = Cx^b. \tag{2}$$

Supposons d'abord que A soit un sommet et que l'axe des z soit dirigé vers le bas ; les coefficients a et b sont alors positifs.

Si A est un ombilic, c'est-à-dire si $a = b$, l'équation (2) se réduit à

$$y = Cx ;$$

les lignes de plus grande pente sont les sections par les plans passant par Oz. Il en passe une infinité par le point A, une seule étant tangente à chaque horizontale issue de ce point.

Ce cas particulier étant écarté, supposons, pour fixer les idées, $a < b$. Résolvons (2) par rapport à y :

$$(3) \qquad y = Cx^{\frac{b}{a}}.$$

Toutes les courbes intégrales passent encore à l'origine; mais, elles y admettent une même tangente, qui est Ox, c'est-à-dire le grand axe de l'indicatrice, à l'exception, toutefois, de celle qui correspond à une valeur infinie de la constante C, qui se réduit à l'axe des y.

Si A était un fond, on arriverait à des conclusions analogues.

Supposons maintenant que A soit un col. Les coefficients a et b sont de signes contraires; supposons, pour fixer les idées, $a > 0$ et $b < 0$. Posons, $b = -b'$. L'équation (2) s'écrit

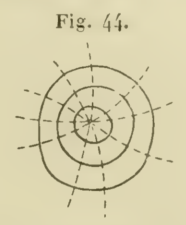
$$(4) \qquad x^{b'} y^{a} = C.$$

Les courbes intégrales ne passent pas à l'origine; elles admettent les axes de coordonnées pour asymptotes et ressemblent à des hyperboles équilatères. Toutefois, celle qui correspond à $C = 0$ se décompose en Ox et Oy et passe, par conséquent, deux fois à l'origine.

Si nous supposons maintenant que la surface est une surface quelconque, assujettie à la seule condition d'être représentable analytiquement et de n'admettre aucune singularité au point A ([1]), on peut la remplacer, au voisinage de ce point, par un paraboloïde osculateur (c'est-à-dire admettant même indicatrice) ayant une équation de la forme (1). Ses lignes de plus grande pente sont, dans la région du point A, très voisines de celles du paraboloïde et l'on peut leur appliquer les résultats de la discussion précédente.

Au voisinage d'un sommet ou d'un fond, toutes les lignes de plus grande pente viennent passer par ce sommet ou par ce fond. Elles y arrivent tangentiellement au grand axe de l'indicatrice, sauf une seule,

Fig. 44.



qui est tangente au petit axe (*fig.* 43, *a*). Dans le cas particulier où l'indicatrice est un cercle, elles arrivent tangentiellement à toutes les directions (*fig.* 44).

([1]) On peut toujours faire une telle hypothèse, puisqu'on peut choisir arbitrairement la surface, sous la seule condition qu'elle épouse la forme du terrain avec une approximation convenable

Au voisinage d'un col, les lignes de plus grande pente ressemblent à des hyperboles équilatères asymptotes aux axes de l'indicatrice; deux seulement d'entre elles passent par le col et elles y passent tangentiellement à ces axes (*fig.* 43, *b*).

99. **Lignes de faîte; lignes de thalweg.** — Considérons un col C et les deux lignes de plus grande pente qui en sont issues, d'après la discussion faite au numéro précédent. Nous savons qu'elles sont respectivement tangentes aux deux axes de l'indicatrice.

L'une d'elles F se trouve dans la région où les altitudes sont supérieures à celle de C. Elle va donc en montant de part et d'autre de ce point. On l'appelle *ligne de faîte* (*fig.* 43, *b*).

L'autre T se trouve, au contraire, dans la région où les altitudes sont inférieures à celle de C. Elle va en descendant de part et d'autre de ce point. On l'appelle *ligne de thalweg*.

On peut encore les caractériser en imaginant un observateur qui les suit en montant. Il voit les lignes de niveau du côté de leur convexité s'il chemine sur une ligne de faîte, et du côté de leur concavité s'il chemine sur une ligne de thalweg. Au voisinage de la ligne de faîte, le terrain a la forme d'une *croupe;* au voisinage de la ligne de thalweg, il a la forme d'un *ravin*, d'une *vallée*.

Les lignes de faîte et de thalweg jouent des rôles très différents, au *point de vue de l'écoulement des eaux* et c'est ce qui fait surtout l'importance de leur distinction. D'une manière générale, on peut admettre que les gouttes d'eau suivent les lignes de plus grande pente. Comme la ligne de faîte et la ligne de thalweg sont de telles lignes, elles peuvent théoriquement être suivies toutes deux par une goutte. Pratiquement, il n'en est pas ainsi. Observons, en effet, la figure 43, *b*. Si l'on parcourt les lignes de plus grande pente dans le sens descendant, on voit qu'elles s'écartent toutes de la ligne de faîte et se rapprochent, au contraire, de la ligne de thalweg. Il en résulte que si une goutte d'eau, suivant primitivement une ligne de faîte, s'en trouve accidentellement écartée d'une très petite quantité, elle s'en écarte de plus en plus et va rejoindre la ligne de thalweg. Si elle suivait, au contraire, primitivement une ligne de thalweg, elle y revient immédiatement après en avoir été écartée. On peut donc dire qu'*une ligne de faîte est une trajectoire instable*, tandis qu'une *ligne de thalweg est une trajectoire stable*. Les eaux fuient de part et d'autre de la

première et viennent se rassembler vers la seconde, justifiant ainsi la dénomination adoptée par les Allemands pour désigner cette dernière (la traduction littérale de thalweg est « chemin de la vallée ») et celle de *ligne de partage des eaux*, qui sert aussi à désigner la ligne de faîte.

On peut se demander où conduit une ligne de faîte si on la suit indéfiniment en partant d'un col. Elle monte continuellement, jusqu'au moment où elle atteint un point de pente nulle, c'est-à-dire un sommet, un fond ou un col. La seconde hypothèse est absurde, puisqu'on ne peut atteindre un fond en montant. La troisième est théoriquement possible. Pratiquement, elle ne l'est pas. Si une ligne de faîte issue du col C rejoignait un col C', d'altitude supérieure, elle serait ligne de faîte pour C et ligne de thalweg pour C'. Or, on ne conçoit pas qu'une ligne de thalweg se transforme, au cours de sa descente, en ligne de faîte ; qu'une vallée se transforme en croupe. Un géomètre pourrait créer artificiellement une surface topographique possédant cette singularité ; mais, la Nature ne se prête pas à de telles fantaisies. Il ne faut pas oublier, en effet, que les vallées sont précisément creusées par l'écoulement des eaux, de sorte que les chemins suivis par celles-ci sont nécessairement des trajectoires stables ([1]).

Il nous reste finalement, comme seule hypothèse possible, que la ligne de faîte doit aboutir à un sommet. Comme il en est ainsi pour les deux directions opposées suivant lesquelles on peut quitter le col, on voit que *toute ligne de faîte est une ligne de plus grande pente joignant deux sommets, en passant par un col.*

En raisonnant de la même manière, on voit qu'une ligne de thalweg ne peut aboutir qu'à un fond. Dans la pratique, ce fond est généralement la mer, qui est le dernier refuge des eaux courantes, exception faite pour celles qui se déversent dans un lac.

100. Intersection de deux surfaces topographiques. — On coupe par des plans horizontaux. Cela revient à prendre les points d'inter-

([1]) Aux raisons précédentes, on peut ajouter une raison de probabilité. Si une ligne de faîte arrive au voisinage d'un col, elle s'y comporte comme une ligne de plus grande pente quelconque et la probabilité est infinie pour qu'elle passe à côté de ce point, puisqu'il n'y a que deux lignes qui traversent le col.

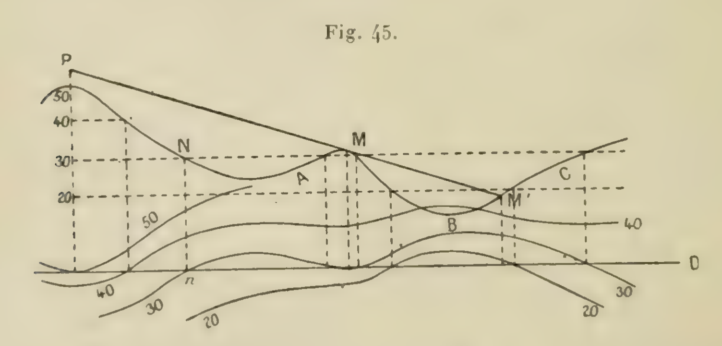
section des lignes de niveau de même cote et à joindre ces points dans l'ordre des cotes croissantes ou décroissantes.

Le même procédé est employé quand l'une des surfaces est une surface géométrique, par exemple un plan non horizontal. On prend les points de rencontre des lignes de niveau de la surface topographique avec les horizontales de cotes rondes du plan.

Si le plan sécant est horizontal et n'a pas une cote ronde, la section est une ligne de niveau, que l'on construit par points, en interpolant entre les deux lignes de niveau à cotes rondes immédiatement voisines. La construction de lignes de niveau auxiliaires peut d'ailleurs être utile dans une région où les lignes à cotes rondes sont très espacées, c'est-à-dire où la pente du terrain est très faible. Cela deviendrait même nécessaire si l'on avait, par exemple, à construire la section d'une telle surface par un plan de très faible pente.

101. **Profil.** — Un *profil* est une section par un plan vertical. Il n'y a pas lieu de construire sa projection horizontale, puisque celle-ci est une droite D, trace du plan sécant. On construit alors sa projection verticale sur un plan parallèle au plan sécant. A cet effet, on coupe encore par les plans horizontaux de cotes rondes. La ligne de niveau de cote z rencontre la droite D en un certain nombre de points. Soit n l'un d'eux. On élève la perpendiculaire nN à D et l'on porte $n\mathrm{N} = z$. On joint ensuite les points tels que N dans l'ordre des cotes croissantes ou décroissantes (*fig.* 45).

Fig. 45.



Au lieu de porter les cotes à partir de D, on peut évidemment les porter à partir d'une droite quelconque D' parallèle à D.

L'échelle adoptée pour ces cotes doit être généralement beaucoup

plus grande que l'échelle de la carte, si l'on veut éviter que le profil construit ne se confonde sensiblement avec D (ou D').

La construction des profils est très utile quand on veut se rendre compte de la forme du terrain.

102. **Intersection avec une droite.** — On coupe par un plan auxiliaire passant par la droite. En général, on choisit ce plan vertical; on construit le profil correspondant, ainsi que la projection verticale de la droite, en utilisant, bien entendu, la même échelle pour les cotes. On prend les points d'intersection des deux lignes obtenues et on les rappelle sur la projection horizontale de la droite. Si l'on veut avoir leurs cotes, il suffit de les mesurer directement sur le dessin, en tenant compte de l'échelle.

Dans le cas particulier où la droite est horizontale, on peut aussi couper par le plan horizontal qui la contient. Cela est immédiat, si ce plan a une cote ronde. Sinon, il faut construire une ligne de niveau auxiliaire, comme il a été expliqué au nº 100. On peut aussi prendre les points de rencontre de la projection horizontale de la droite avec les deux lignes de niveau de cotes immédiatement supérieure et inférieure à celle de la droite. Puis on interpole entre ces points proportionnellement aux différences de cotes. Cela revient à couper par un plan vertical, en remplaçant le profil par des segments de droites, entre les cotes rondes qui comprennent celle de la droite donnée.

103. **Cône circonscrit à partir d'un point P donné.** — On coupe par les plans verticaux passant par ce point. On construit les profils correspondants et l'on mène à chacun d'eux les tangentes issues de la projection verticale de P (*fig.* 45). On rappelle les points de contact en projection horizontale et on les joint par un trait continu, en suivant attentivement la rotation du plan vertical auxiliaire.

Ce problème se présente lorsqu'on veut reconnaître et marquer sur la carte les régions vues à partir d'un observatoire donné. La ligne qui sépare ces régions des régions cachées se compose, en effet, de la courbe C lieu des points de contact des rayons visuels tangents et de la courbe C' lieu des points de rencontre de ces rayons visuels avec la surface. On s'en rend très bien compte et l'on distingue aisément les régions cachées, en examinant chaque profil. Par exemple, sur la figure 45, on voit que l'arc MBM' est caché, tandis que les

arcs AM et M′C sont vus. La région engendrée par l'arc MBM′ dans la rotation du plan vertical sera donc une région cachée. On la couvrira, par exemple, de hachures.

Le même problème permettrait de résoudre les questions d'ombre. Il suffirait, en effet, de prendre le point P à l'infini dans la direction des rayons solaires. Mais cela offre peu d'intérêt pratique.

CHAPITRE IX.

NOTIONS DE PERSPECTIVE.

104. Propriétés générales. — Soit un plan T appelé plan du tableau ou simplement *tableau*. Soit, en outre, un point O, appelé *point de vue*. On appelle *perspective d'un point* M de l'espace la trace m de la droite OM sur le plan T. La perspective n'est donc autre chose qu'une projection conique, et l'on peut lui appliquer toutes les propriétés bien connues de cette projection.

La perspective d'une droite D est une droite d, trace du plan (O, D) sur le plan du tableau. Le rapport anharmonique de quatre points quelconques de D est égal au rapport anharmonique des points homologues de d (t. II, n° 131). Le rapport anharmonique de quatre droites de l'espace situées dans un même plan et concourant en un point P est égal au rapport anharmonique de leurs perspectives, lesquelles concourent au point p, perspective de P. En particulier, les divisions et faisceaux harmoniques se conservent dans la perspective, c'est-à-dire qu'ils se transforment en divisions et faisceaux harmoniques.

Une courbe algébrique a pour perspective une courbe algébrique, qui a généralement le même degré, ainsi qu'il résulte du théorème du n° 379 du tome II. Cela est toujours vrai lorsque la courbe proposée est une courbe plane, dont le plan ne passe pas par O. En particulier, la perspective d'une conique est une conique.

105. Point de fuite; ligne de fuite. — On appelle *point de fuite* f d'une droite D la perspective du point à l'infini de cette droite. C'est donc la trace sur le tableau de la projetante Of parallèle à D.

Deux droites parallèles ayant même point à l'infini, leurs perspectives ont même point de fuite.

Une droite parallèle au plan T a son point de fuite à l'infini.

Le lieu des points de fuite des droites appartenant ou parallèles à un plan P est une droite, trace sur T du plan parallèle à P mené par O. On l'appelle *ligne de fuite* du plan P. On peut dire que c'est la perspective de la droite de l'infini de ce plan (t. II, n° 73).

Deux plans parallèles ont évidemment même ligne de fuite.

106. Résolution de quelques problèmes par la considération des points de fuite et du rapport anharmonique. — On peut effectuer, dans une perspective, des constructions faisant intervenir des propriétés métriques, en interprétant projectivement celles-ci par la considération de certains rapports anharmoniques. Nous allons rapidement passer en revue quelques-uns de ces problèmes.

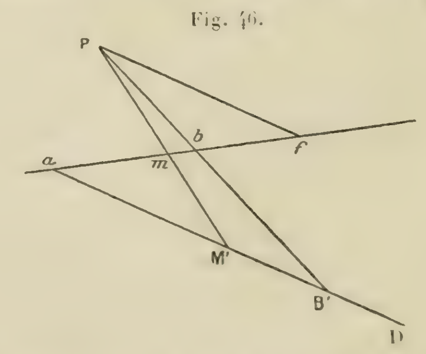
Problème I. — *Étant donnés, dans une perspective, deux points a et b et le point de fuite f de la droite ab, construire le point m qui, dans l'espace, divise le segment* AB *dans un rapport donné.*

Soit $\frac{MA}{MB} = R$. On peut écrire (t. II, n° 128)

$$R = (ABM\infty) = (abmf).$$

On est donc ramené à construire un point m, connaissant son rapport anharmonique avec trois points donnés, problème qu'on sait résoudre (*loc. cit.*). Pratiquement, voici comment on pourra procéder : Par a, menons une droite quelconque aD. Portons-y une longueur quelconque aM'; puis, portons $\overline{M'B'} = \frac{M'a}{R}$. Joignons B'$b$

Fig. 46.



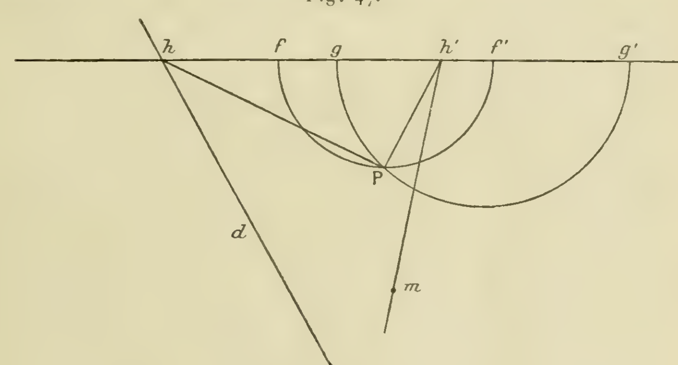
et prenons son intersection P avec la parallèle à aD menée par f. La droite PM' rencontre ab au point m cherché.

Comme cas particulier, on saura *prendre le milieu d'un segment.* Il suffit, en effet, de supposer $R = -1$, c'est-à-dire de prendre B' symétrique de a par rapport à M'. Le point m est alors conjugué harmonique de f par rapport à ab.

Problème II. — *On donne les points de fuite f, f', g, g' de deux couples de directions rectangulaires appartenant à un même plan. On donne, en outre, les perspectives d et m d'une droite et d'un point de ce plan. Construire la perspective de la perpendiculaire à* D *menée dans le plan par* M.

La droite d rencontre la ligne de fuite ff' du plan au point de fuite h de D. La perpendiculaire cherchée doit la rencontrer au point de fuite h' commun à toutes les droites perpendiculaires à D. Or, les points à l'infini d'un angle droit qui pivote, dans son plan, autour de son sommet, décrivent des divisions en involution (t. II, n° 164). Il en résulte que les trois couples de points

Fig. 47.



(f, f'), (g, g'), (h, h') doivent appartenir à une même involution. On est encore ramené à un problème connu (t. II, Chap. IX, Exercice proposé n° 23). Rappelons la solution : on décrit les cercles de diamètres ff' et gg'; ils se rencontrent en P; la perpendiculaire à Ph menée par P rencontre ff' au point h'. Il n'y a plus qu'à joindre mh' pour avoir la droite demandée.

Il est à remarquer que le point P, une fois construit, servira pour mener les perpendiculaires à toutes les droites du plan considéré.

Problème III. — *Les données étant les mêmes que précédemment, construire une droite* D' *faisant avec* D *un angle donné* V.

Les points de fuite h et h' de D et de D' doivent former avec les perspectives i et j des points cycliques un rapport anharmonique connu, qui serait donné par la formule de Laguerre (t. II, n° 164). Or, ce rapport est égal au rapport anharmonique du faisceau P($hh'ij$). Mais les droites Pi, Pj, rayons

doubles de l'involution déterminée par les deux couples de droites rectangulaires (Pf, Pf') et (Pg, Pg'), ne sont autres que les droites isotropes du point P. Dès lors, si l'on applique de nouveau la formule de Laguerre, on voit que l'angle de Ph avec Ph' doit être égal à l'angle V donné.

En définitive, la construction est la même que pour le problème précédent; mais, on construit l'angle $\widehat{hPh'}$ égal à l'angle donné, au lieu de construire un angle droit.

Corollaire. — *Dans tout plan, il existe deux points tels que les angles ayant ces points pour sommets conservent leur grandeur dans la perspective.*

Ces points sont, en effet, les deux points qui admettent pour perspectives P et le point symétrique par rapport à ff'.

Problème IV. — *On donne les mêmes points de fuite que dans le problème II et les perspectives a, b, c de trois points du plan. On considère le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Construire la perspective de son point de rencontre* M *avec une droite passant par* A *et donnée par sa perspective.*

L'angle AMB doit être égal à l'angle ACB. Si h, h', k, k' sont les points de fuite de MA, MB, CA, CB, les angles hPh' et kPk' doivent dont être égaux et de même sens. Or, de tous ces points de fuite, le second est seul inconnu; on peut donc le construire. En joignant ensuite $h'b$ et prenant le point de rencontre de cette droite avec la droite donnée ah, on a le point m cherché.

107. Notions sur la mise en perspective des figures de l'espace. — Une figure de l'espace étant donnée, ainsi que le tableau et le point de vue, il s'agit de construire les perspectives des différents points de la figure. Les artistes qui utilisent la perspective ont élaboré tout une technique permettant la résolution de ce problème. Nous allons en exposer les traits principaux.

Le tableau est toujours supposé vertical.

On définit les différents points de l'espace par leur position relativement au tableau et à un plan horizontal de référence, qu'on appelle le *géométral.*

On appelle *ligne de terre* LT l'intersection du géométral et du tableau.

On appelle *direction principale* la direction perpendiculaire au tableau et *point de fuite principal* le point de fuite F de cette direction, c'est-à-dire, en somme, la projection orthogonale du point de vue sur le tableau. Ce point de vue est, dès lors, déterminé si l'on se

donne, outre F, la distance de O à T, qui porte le nom de *distance principale*.

La cote de O au-dessus du géométral est appelée *hauteur*. C'est évidemment la distance du point de fuite principal à la ligne de terre.

On appelle *ligne d'horizon* HH' la ligne de fuite des plans horizontaux. C'est la parallèle à LT menée par F. Toute droite horizontale a son point de fuite sur cette ligne.

Pour définir la position d'un point M de l'espace, on choisit un trièdre de référence, dont l'origine est un point quelconque L de la ligne de terre; en outre, l'axe des x est dirigé suivant cette ligne; l'axe des y est perpendiculaire au tableau, du côté opposé au point de vue; l'axe des z est vertical et dirigé vers le haut. Les trois coordonnées du point M par rapport à ce trièdre sont habituellement appelées *largeur*, *éloignement* (ou *profondeur*) et *hauteur*.

Pour mettre une figure en perspective, on commence par faire la perspective de sa *projection sur le géométral*. Puis, on effectue ce qu'on appelle la *mise en hauteur*.

108. **Mise en perspective du géométral.** — Soit un point M du géométral, dont nous nous proposons de construire la perspective. On emploie les deux méthodes suivantes :

1° *Méthode du double point de fuite*. — Supposons qu'on connaisse les points de fuite a et b de deux directions A et B du géométral. Menons, par M, les parallèles à ces directions. Elles rencontrent la ligne de terre en deux points a' et b', qui sont à eux-mêmes leurs propres perspectives (comme tous les points du tableau). En joignant aa' et bb', on a les perspectives des droites Ma' et Mb'. Le point m se trouve donc à l'intersection de aa' et de bb'.

Il nous reste à voir comment on construira, dans la pratique, les points a, b, a', b'.

Pour avoir le point de fuite a d'une direction de coefficient angulaire m, il suffit de porter, sur la ligne d'horizon, à partir du point de fuite principal, $Fa = \frac{d}{m}$, en appelant d la distance principale. On peut, soit calculer cette distance, pour la reporter ensuite dans le sens convenable, soit la construire géométriquement.

Pour construire le point a', on pourrait évidemment calculer sa

largeur, connaissant les coordonnées de M et le coefficient angulaire m. Mais, cela serait assez peu pratique et il est généralement plus simple de faire une épure dans le géométral, reproduisant, en vraie grandeur, la figure qu'il s'agit de mettre en perspective. En traçant, une fois pour toutes, la ligne de terre dans cette épure, on construit très aisément la largeur de tout point tel que a'.

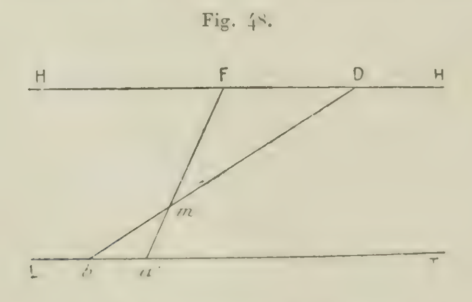
Cette épure dans le géométral peut être dessinée sur une feuille à part ou bien sur la même feuille que la perspective, en imaginant le géométral rabattu sur le tableau.

Cette méthode du double point de fuite est particulièrement avantageuse lorsqu'on doit faire la perspective d'une figure présentant plusieurs séries de points situés sur des droites parallèles, comme, par exemple, un carrelage. On prend alors, pour points de fuite a et b, les points de fuite de ces parallèles.

Lorsqu'on a à mettre en perspective une figure irrégulière, par exemple une courbe quelconque, on trace un quadrillage dans le géométral; on fait la perspective de ce quadrillage et l'on en déduit la perspective de la figure donnée, en utilisant les points où cette figure rencontre le quadrillage. Ce procédé est connu sous le nom de *craticulage*.

109. 2° *Méthode du point de distance.* — C'est au fond la méthode précédente, avec un choix particulier des directions A et B. On prend pour direction A la direction principale, donc pour premier

Fig. 48.



point de fuite le point de fuite principal F. Comme seconde direction B, on prend une direction faisant 45° avec la ligne de terre, soit d'un côté, soit de l'autre. Le point de fuite correspondant D s'obtient en portant, sur la ligne d'horizon, la distance FD égale à la distance prin-

cipale. Il porte le nom de *point de distance accidentelle* ou simplement *point de distance*.

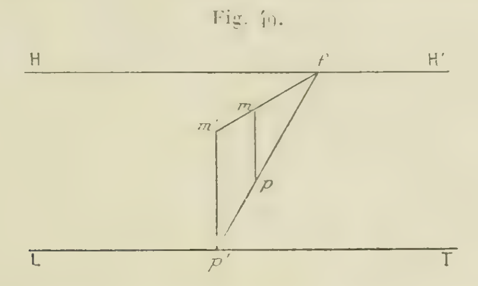
Ceci étant, soient x et y les coordonnées du point M dans le géométral. Le point que nous avions appelé tout à l'heure a' est obtenu en portant $\overline{La'} = x$. Quant au point b', on le construit en portant $\overline{a'b'} = y$, dans le sens inverse de $\overline{FD}$.

La perspective du point M est à l'intersection des droites Fa' et Db'.

110. Mise en hauteur. — Soient un point M de l'espace, P sa projection sur le géométral et z sa hauteur. Supposons construite la perspective p de P et proposons-nous de construire la perspective m de M. C'est ce qu'on appelle faire la *mise en hauteur*.

Menons par les points M et P deux horizontales parallèles, de point de fuite f, et soient M' et P' leurs points de rencontre avec le tableau.

Fig. 40.



Le segment M'P' est vertical et a pour longueur z; de plus, il coïncide avec sa perspective. On a, dès lors, la construction suivante.

On joint fp, jusqu'à sa rencontre p' avec LT; au-dessus de p', on porte $p'm' = z$; on joint fm' et l'on prend son point de rencontre m avec la verticale de p.

Le lecteur qui désirerait approfondir davantage les procédés de la perspective lira avec fruit les pages 41 à 118 du tome I du *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*, par Maurice d'Ocagne (Gauthier-Villars, 1917).

CHAPITRE X.

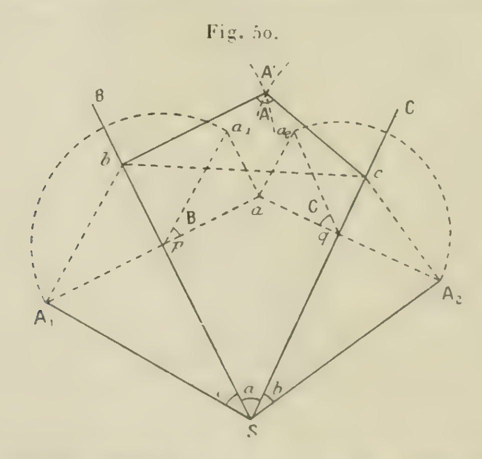
RÉSOLUTION DES TRIÈDRES.

111. **Énoncé du problème.** — Un trièdre possède six éléments : trois faces et trois dièdres. Si l'on se donne trois d'entre eux, le trièdre est généralement déterminé. Nous nous proposons de le construire dans chacun des six cas possibles et d'indiquer aussi comment on peut construire les trois éléments qui ne sont pas donnés.

Pour résoudre cette dernière partie du problème, nous nous arrangerons toujours pour que notre trièdre soit connu finalement par *une face* BSC *dans le plan horizontal et par la projection et la cote d'un point* A *de l'arête opposée*. Voici comment on peut alors construire les six éléments du trièdre.

On connaît déjà la face BSC. Pour avoir les deux autres, on les

Fig. 50.



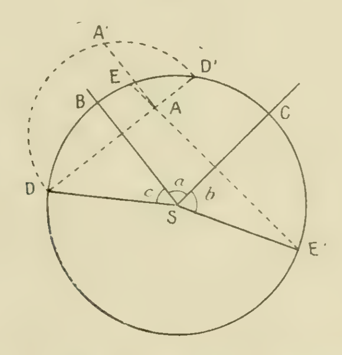
rabat respectivement autour de SB et de SC et, pour cela, il suffit de rabattre A, qui vient successivement en A_1 et en A_2. On a, du même coup, en apa_1 et aqa_2, les angles plans des dièdres SB et SC.

Reste à construire l'angle plan du dièdre SA. A cet effet, on mène, par A, un plan perpendiculaire à SA. Il rencontre SB au point b, situé sur la perpendiculaire $A_1 b$ à $A_1 S$, puisque, dans le rabattement autour de SB, b ne bouge pas et l'angle droit bAS se rabat en vraie grandeur. On construit, de même, le point c. L'angle plan cherché est bAc, dans l'espace. Pour avoir sa grandeur, on le rabat en $bA'c$, en remarquant que l'on connaît $bA' = bA_1$ et $cA' = cA_2$.

Nous allons maintenant passer en revue les six cas de résolution et nous discuterons chaque fois les conditions de possibilité.

112. Premier cas : *On donne les trois faces* a, b, c. — Prenons le plan de la face BSC $= a$ pour plan de projection. L'arête SA est à l'intersection de deux cônes de révolution, de sommet commun S, d'axes respectifs SB et SC et de demi-angles au sommet respectifs c et b. Pour la construire, nous appliquons la méthode générale du n° 66, c'est-à-dire que nous coupons par une sphère de centre S. Les deux cônes sont coupés suivant deux parallèles projetés horizon-

Fig. 51.



talement suivant DD′ et EE′. Ces parallèles se rencontrent en deux points, dont la projection horizontale commune est A. Ces deux points sont symétriques par rapport au plan horizontal; il leur correspond donc deux trièdres symétriques par rapport à ce plan. Nous considérons seulement l'un d'eux, par exemple celui qui se trouve au-dessus du plan horizontal. Pour achever de le déterminer, il ne nous reste plus qu'à chercher la cote de A. Pour cela, nous rabattons, par exemple, le cercle DD′ et nous avons en AA′ la cote cherchée.

Discussion. — Pour que la construction soit possible, il faut et il suffit que le point A soit intérieur au contour apparent de la sphère. Pour cela, il faut et il suffit que, si l'on parcourt la circonférence de ce contour apparent dans le sens BC, par exemple, on rencontre les points D, D', E, E' dans l'ordre D, E, D', E'. Pour qu'il en soit ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$\widehat{DE} < \widehat{DD'} < \widehat{DE'} < \widehat{DE'D},$$

ou

$$c + a - b < 2c < c + a + b < 2\pi,$$

ou

(1) $$a - b < c < a + b$$

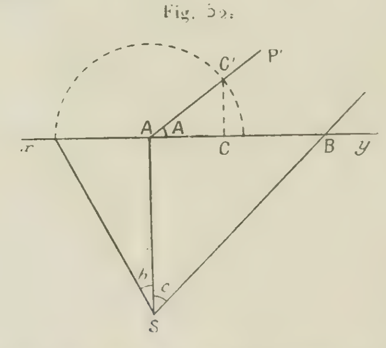
et

(2) $$a + b + c < 2\pi.$$

On retrouve les inégalités, bien connues en Géométrie élémentaire, que doivent vérifier les faces d'un trièdre.

113. Deuxième cas : *On donne deux faces b et c et le dièdre compris* A. — Prenons le plan de la face ASB = c pour plan horizontal et prenons un plan vertical auxiliaire xy perpendiculaire à SA.

Fig. 52.



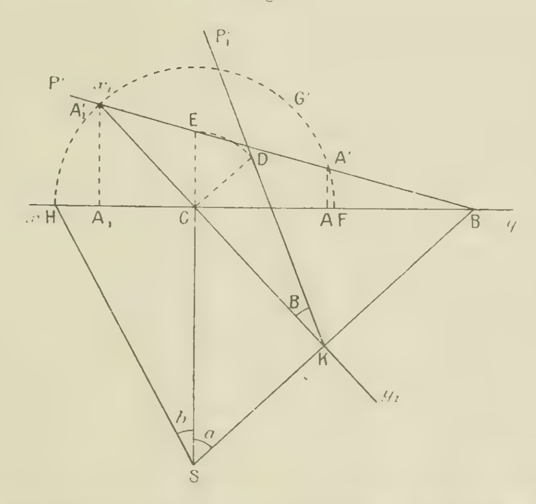
L'arête SC doit se trouver dans le demi-plan de bout SAP', dont la trace verticale AP' fait l'angle A avec xy. Elle doit aussi se trouver sur un cône de révolution d'axe SA, de sommet S et de demi-angle au sommet b. La base de ce cône dans le plan vertical est un cercle de construction évidente (¹), qui rencontre la demi-droite AP' au

(¹) Si l'angle b était obtus, il faudrait prendre xy en avant de S, de façon à bien obtenir la base de la nappe qui fait l'angle b avec la demi-droite SA.

point C′, rappelé horizontalement en C sur xy. Le problème est résolu et la construction est manifestement toujours possible.

114. **Troisième cas :** *On donne deux faces a et b et le dièdre* B *opposé à l'une d'elles.* — Prenons le plan BSC comme plan horizontal. L'arête SA se trouve sur le cône de révolution de sommet S, d'axe SC et de demi-angle au sommet b. Elle se trouve aussi sur le demi-plan SBP qui fait avec SBC l'angle dièdre B. Il nous faut donc

Fig. 53.



prendre l'intersection de ces deux surfaces. A cet effet, nous les coupons par un plan xy perpendiculaire à SC, qui donne dans le cône une section circulaire, dont la projection verticale G′ se construit sans difficulté. Reste à trouver la trace verticale du demi-plan SBP. Pour cela, nous prenons un deuxième plan vertical x_1y_1 perpendiculaire à SB et que nous faisons passer, par exemple, par le point C. Dans ce nouveau système, la trace verticale KP′₁ du demi-plan a une construction évidente. Un changement de plan nous donne ensuite la trace verticale BP′ dans l'ancien système. Cette trace rencontre le cercle G′ en deux points A′ et A′₁, qui se rappellent en A et A₁ sur xy. Le problème est résolu.

Discussion. — Pour que la construction soit possible, nous avons une première condition nécessaire, qui est la réalité des génératrices

d'intersection du plan SBP avec le cône. Il équivaut de dire que ce plan doit couper la sphère inscrite dans le cône et de centre C, par exemple. La distance de C au plan doit donc être inférieure au rayon de cette sphère. Or, cette distance est égale à

$$\mathrm{CK}\sin \mathrm{B} = \mathrm{SC}\sin a \sin \mathrm{B}.$$

Quant au rayon, il est égal à SC $\sin b$. Nous avons donc la condition

$$(3) \qquad \sin a \sin \mathrm{B} < \sin b.$$

Supposons cette condition remplie. Le plan SBP coupe certainement le cône. Mais, nous ne devons accepter que les génératrices dont la trace verticale se trouve sur la demi-droite BP′.

Supposons, pour simplifier, que les angles a et b soient tous deux aigus, comme sur la figure 53. Suivant la position du point B par rapport au cercle G′, nous sommes conduits à distinguer plusieurs cas :

Premier cas : $a < b$. Il y a évidemment toujours *une solution unique*.

Deuxième cas : $a > b$. Si $\mathrm{B} < \frac{\pi}{2}$, la demi-droite BP′ fait un angle aigu avec la demi-droite BC et rencontre effectivement G′ en deux points; il y a *deux solutions*. [Bien entendu, ces deux solutions se confondent dans le cas limite où l'inégalité (3) devient une égalité.]

Si $\mathrm{B} > \frac{\pi}{2}$, on a les conclusions inverses; c'est le prolongement de BP′ qui rencontre G′ et il n'y a *pas de solution*.

Troisième cas : $a = b$. Le point B se trouve juste en F et il n'y a de solution que si $\mathrm{B} < \frac{\pi}{2}$, auquel cas la solution est *unique*.

Nous avons terminé la discussion, dans l'hypothèse où les angles a et b sont tous deux aigus. Il nous reste à nous libérer de cette restriction. Pour cela, observons que si l'on remplace l'arête SA, par exemple, par la demi-droite opposée SA′, on obtient un nouveau trièdre dont les éléments sont liés à ceux du premier par les formules

$$a' = a, \quad b' = \pi - b, \quad c' = \pi - c, \quad \mathrm{A}' = \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}' = \pi - \mathrm{B}, \quad \mathrm{C}' = \pi - \mathrm{C}.$$

Dès lors, si a est seul obtus, on prolongera SB et l'on construira le

trièdre SAB′C, qui sera défini par $a' = \pi - a$, $b' = b$, $B' = B$. Ce trièdre une fois construit, on n'aura plus qu'à prolonger SB.

Si b est seul obtus, on construira SA′BC, défini par $a' = a$, $b' = \pi - b$, $B' = \pi - B$; puis, on prolongera SA′.

Si a et b sont tous deux obtus, on construira SABC′, défini par $a' = \pi - a$, $b' = \pi - b$, $B' = \pi - B$; puis, on prolongera SC′.

Nous laissons au lecteur le soin de voir ce que deviennent les résultats de la discussion précédente dans ces différentes hypothèses.

115. **Quatrième cas :** *On donne une face a et les deux dièdres adjacents* B *et* C. — Ce cas pourrait se ramener au deuxième par la considération du trièdre supplémentaire, dont on connaît deux faces $b' = \pi - B$, $c' = \pi - C$ et le dièdre compris $A' = \pi - a$. Une fois ce trièdre construit, on aurait le trièdre demandé, en construisant son supplémentaire. La solution serait toutefois un peu longue et c'est pourquoi nous allons indiquer une solution directe.

Prenons comme plan horizontal BSC. Si nous prenons deux plans verticaux auxiliaires xy perpendiculaire à SB et x_1y_1 perpendiculaire à SC, nous pouvons immédiatement construire les traces verticales BP′ et CQ′ des faces ASB et ASC. Pour construire l'arête SA, il nous faut prendre l'intersection de ces plans. On pourrait faire un

Fig. 54.

changement de plan sur le second, de manière à les rapporter tous les deux au même système de projections. On peut aussi, et c'est ce que

nous avons fait sur la figure 54, chercher le point A de SA qui a une cote h donnée quelconque. En coupant par le plan horizontal défini par cette cote, nous obtenons les deux horizontales Da et Ea, qui se rencontrent en a, projection horizontale du point cherché.

Le problème est résolu et admet toujours une solution, comme il est arrivé dans le deuxième cas.

116. **Cinquième cas :** *On donne deux dièdres* A *et* B *et la face* a *opposée à l'un d'eux.* — Ce cas pourrait se ramener au troisième par la considération des trièdres supplémentaires. Donnons toutefois une solution directe.

Prenons ASB pour plan horizontal et un plan perpendiculaire à SB pour plan vertical. Nous construisons aisément l'arête SC, qui est déterminée par le point (c, c'). Il nous reste à mener par cette droite

Fig. 55.

un plan faisant l'angle A avec le plan horizontal. Cela revient évidemment à mener, par S, un plan tangent au cône de révolution qui a pour sommet (c, c'), pour axe une verticale et pour demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - A$. (Nous supposons A et B aigus. On peut toujours se ramener à ce cas par des prolongements d'arêtes, ainsi qu'il a été expliqué au n° 114.) Nous construisons la base de ce cône dans le plan horizontal et nous lui menons la tangente SA. Cette tangente est la troisième arête du trièdre.

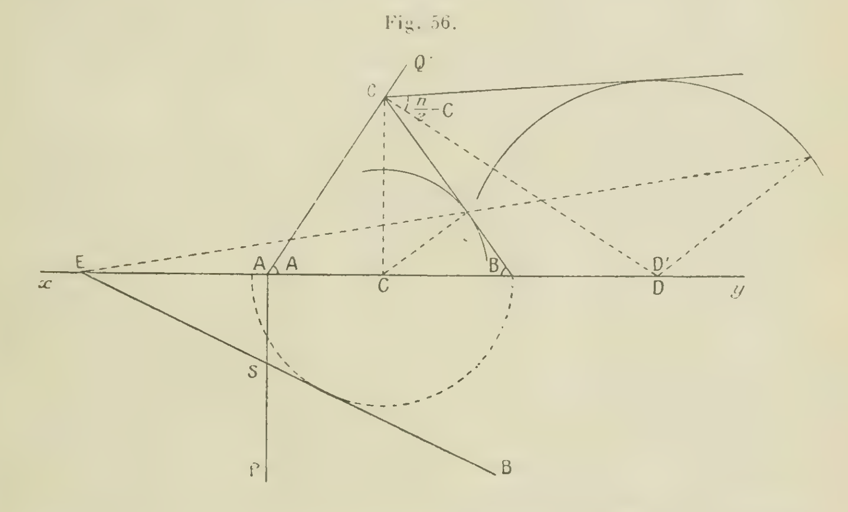
On pourrait discuter les conditions de possibilité et le nombre des

solutions. Nous laissons au lecteur le soin de le faire, en nous contentant d'observer qu'on peut en déduire les résultats de ceux de la discussion du troisième cas.

117. **Sixième cas :** *On donne les trois dièdres* A, B, C. — Ce cas se ramène au premier par les trièdres supplémentaires. Donnons toutefois une solution directe.

Prenons pour plan horizontal le plan de la face ASB et pour plan vertical un plan perpendiculaire à SA. Construisons le plan PAQ′ de la face ASC et, laissant S indéterminé sur AP, donnons-nous la trace verticale (C, C′) de l'arête SC. Le plan de la face BSC doit faire l'angle B avec le plan horizontal et l'angle C avec le plan PAQ′. Il revient au même de dire qu'il doit être tangent aux deux cônes de

Fig. 56.



révolution qui ont, le premier, pour sommet (C, C′), pour axe une verticale et pour demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2}$ — B ; le second, pour sommet (C, C′), pour axe la perpendiculaire (CD, C′D′) à PAQ′ et pour demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2}$ — C. Nous sommes donc ramenés à mener un plan tangent commun à ces deux cônes.

A cet effet, nous considérons les sphères inscrites, qui ont, par exemple, leurs centres C et D sur la ligne de terre. Le plan cherché doit passer par leur centre de similitude E. Dès lors, nous aurons la

trace horizontale de ce plan en menant par E une tangente à la trace horizontale du premier cône, laquelle trace est circulaire. Cette tangente ESB constitue l'arête SB du trièdre; elle rencontre AP au sommet S, qu'il suffit de joindre à (C, C') pour avoir la troisième arête.

Nous ne ferons pas non plus la discussion, dont le résultat peut se déduire de la discussion du premier cas, par la considération des trièdres supplémentaires.

TRIGONOMÉTRIE

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

118. **Cercle trigonométrique.** — On appelle *cercle trigonométrique* un cercle orienté de rayon 1. Le sens positif habituellement adopté est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Étant donnés deux points A et M sur ce cercle, nous avons vu (t. II, n° 14) que la mesure algébrique a de l'arc AM est définie à un multiple entier près de la longueur de la circonférence, c'est-à-dire à $2k\pi$ près. Si α désigne une de ses déterminations, les autres sont données par la formule

$$a = \alpha + 2k\pi. \tag{1}$$

Le nombre a sert aussi de mesure à l'angle orienté $(\widehat{OA, OM})$ (*loc. cit.*).

L'unité d'arc adopté varie suivant la nature des questions. Dans les questions théoriques, on prend pour unité le rayon du cercle, c'est-à-dire, en somme, l'unité de longueur, puisque ce rayon a été supposé égal à 1. On dit alors que les arcs et les angles sont évalués en *radians*, le radian étant, par conséquent, l'arc dont la longueur est égale à 1 ou l'angle au centre correspondant.

Dans les questions d'ordre pratique, on prend pour unité le *degré*, qui est le $\frac{1}{360}$ de la circonférence, ou le *grade*, qui est le $\frac{1}{400}$ de la circonférence. Le degré est divisé en 60 minutes, la minute étant elle-même divisée en 60 secondes. Quant au grade, on le divise suivant le système décimal, en *décigrades*, *centigrades*.

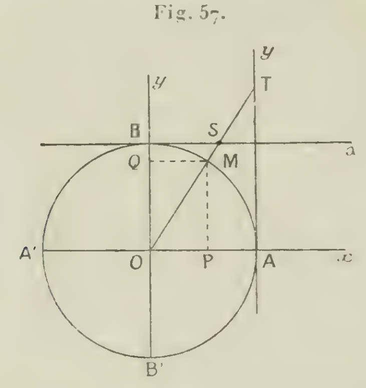
milligrades, etc. Ces deux systèmes sont appelés respectivement système *sexagésimal* et système *centésimal*. Le premier est le plus ancien ; mais, le second est, de beaucoup, le plus pratique, à cause des complications introduites par les minutes et les secondes dans les opérations arithmétiques effectuées sur des angles évalués dans le système sexagésimal.

Nous n'insistons pas davantage sur ces considérations, qui sont élémentaires.

119. Lignes trigonométriques. — Nous allons définir les *lignes trigonométriques* de l'arc AM ou de l'angle $(\widehat{\mathrm{OA}, \mathrm{OM}})$.

Menons l'axe Ox, qui va de O vers l'origine A de notre arc. Menons ensuite l'axe Oy, d'angle polaire $+\frac{\pi}{2}$, le plan étant orienté

Fig. 57.



dans le même sens que le cercle trigonométrique (t. II, n° 13). On appelle *cosinus* et *sinus* de l'arc a l'abscisse et l'ordonnée de l'extrémité M de cet arc, c'est-à-dire les projections orthogonales du vecteur $\overline{\mathrm{OM}}$ sur Ox et sur Oy.

Par A, menons l'axe Ay équipollent à Oy et, par B, menons, de même, l'axe Bx équipollent à Ox. La droite OM rencontre ces deux axes respectivement en T et S. On appelle *tangente* et *cotangente* de l'arc a les mesures algébriques $\overline{\mathrm{AT}}$ et $\overline{\mathrm{BS}}$. On peut dire aussi que la tangente est l'ordonnée du point T et la cotangente est l'abscisse de S.

La droite OM étant orientée de O vers M, on appelle *sécante*

et *cosécante* de l'arc a les mesures algébriques $\overline{OT}$ et $\overline{OS}$. Ces dernières lignes sont peu utilisées.

Ces différentes quantités $\cos a$, $\sin a$, $\operatorname{tang} a$, $\cot a$, $\operatorname{séc} a$ et $\operatorname{coséc} a$ sont appelées les *lignes trigonométriques de l'arc a*.

Si l'on considère a comme une variable indépendante, elles constituent six fonctions, qui portent le nom de *fonctions circulaires*. Ces fonctions ont été étudiées en détail dans le Tome I (nos 76 et 77).

120. Arcs correspondant à une ligne trigonométrique donnée. — Si l'*on se donne le cosinus*, on connaît l'abscisse de M. Sur le cercle trigonométrique, il y a deux points M et M' admettant cette abscisse; ils sont symétriques par rapport à Ox. Toutes les déterminations des arcs AM et AM' sont comprises dans la formule

$$a = 2k\pi \pm \alpha. \tag{2}$$

Si l'*on se donne le sinus*, on connaît l'ordonnée de M. Sur le cercle trigonométrique, il y a deux points M et M' admettant cette ordonnée; ils sont symétriques par rapport à Oy. Si α désigne une détermination de l'arc AM, une détermination de AM' est $\alpha' = \pi - \alpha$, car la moyenne arithmétique $\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{\pi}{2}$ convient bien au point B, milieu de l'arc MM'. Les différents arcs admettant un sinus donné sont donc compris dans les deux formules

$$a = 2k\pi + \alpha, \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha. \tag{3}$$

Si l'*on se donne la tangente ou la cotangente*, on connaît les points T ou S, donc la droite OM, qui rencontre le cercle trigonométrique en deux points diamétralement opposés, de sorte que les arcs correspondants sont donnés par la formule

$$a = k\pi + \alpha. \tag{4}$$

121. Relations entre les lignes trigonométriques d'un même angle. — Si l'on se donne une des six lignes trigonométriques de l'angle a, les cinq autres sont déterminées, au signe près. *A priori*, il doit donc exister entre elles cinq relations indépendantes.

Effectivement, le théorème de Pythagore nous donne d'abord la relation

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1, \tag{5}$$

qui permet de calculer une des deux premières lignes trigonométriques connaissant l'autre.

Écrivons maintenant que les points $M(\cos a, \sin a)$, $T(1, \operatorname{tang} a)$ et $S(\cot a, 1)$ sont en ligne droite avec l'origine; nous obtenons les deux nouvelles relations

$$(6) \qquad \operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}, \qquad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a},$$

qui donnent la troisième et la quatrième ligne en fonction des deux premières.

Enfin, en utilisant les formules de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes (t. II, n° 40), nous obtenons les deux dernières relations

$$(7) \qquad \operatorname{séc} a = \frac{1}{\cos a}, \qquad \operatorname{coséc} a = \frac{1}{\sin a}.$$

Ces cinq formules portent le nom de *formules fondamentales*.

On peut en déduire des *formules dérivées*, en les combinant de différentes manières. Par exemple, en multipliant membre à membre les deux formules (6), on obtient

$$(8) \qquad \operatorname{tang} a \cot a = 1.$$

De même, en divisant (5) par $\cos^2 a$ ou par $\sin^2 a$, on obtient

$$(9) \qquad 1 + \operatorname{tang}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}, \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}.$$

122. Relations simples entre les lignes d'arcs différents. — Prenons successivement les symétriques de M par rapport à Ox, Oy, O et la première bissectrice. En appliquant la formule de Chasles pour calculer les nouveaux arcs et les formules établies au n° 244 du Tome II pour avoir les nouvelles coordonnées, nous obtenons

$$(10) \qquad \cos(-a) = \cos a, \qquad \sin(-a) = -\sin a;$$

$$(11) \qquad \cos(\pi - a) = -\cos a, \qquad \sin(\pi - a) = \sin a;$$

$$(12) \qquad \cos(\pi + a) = -\cos a, \qquad \sin(\pi + a) = -\sin a;$$

$$(13) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

En utilisant maintenant (13) et (10), et remarquant que

$$\frac{\pi}{2} + a = \frac{\pi}{2} - (-a),$$

on a

(14) $$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a.$$

En se servant de (6), on déduit enfin des formules (10) à (14)

(15) $$\text{tang}(-a) = -\text{tang}\, a, \qquad \text{tang}(\pi - a) = -\text{tang}\, a,$$

(16) $$\text{tang}(\pi + a) = \text{tang}\, a,$$

(17) $$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cot a = \frac{1}{\text{tang}\, a},$$

(18) $$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\cot a.$$

123. Réduction d'un arc au premier quadrant. — Étant donné un arc quelconque a, on peut trouver un arc terminé dans le premier quadrant, c'est-à-dire compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, dont les lignes trigonométriques ont mêmes valeurs absolues que celles de a. Supposons, par exemple, que a soit évalué en grades. Soit a' son reste de division par 400. On peut remplacer a par a', car ces deux arcs se terminent au même point M du cercle trigonométrique et, par conséquent, ont les mêmes lignes.

On peut ensuite, par une des symétries envisagées au numéro précédent, amener ce point M dans le premier quadrant. On applique l'une des formules (10), (11), (12) et le problème est résolu.

En appliquant les formules (13), on peut même ramener le calcul des lignes d'un arc quelconque à celui des lignes d'un arc compris entre o et 50 grades ou 45°.

Ces deux problèmes se présentent dans le calcul pratique des fonctions circulaires au moyen d'une table de logarithmes.

124. Lignes trigonométriques de quelques arcs simples. — La théorie élémentaire des polygones réguliers permet de calculer les lignes trigonométriques des sous-multiples simples de π. Bornons-nous à signaler les formules les plus courantes :

(19) $$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{tang}\,\frac{\pi}{4} = 1;$$

(20) $$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

(21) $$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{tang}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \qquad \text{tang}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

125. Formules d'addition. — Proposons-nous de calculer les lignes trigonométriques de l'arc $a+b$, en fonction de celles des arcs a et b.

Portons l'arc $AM = a$, puis, à partir de M, l'arc $MM' = b$. Considérons les axes $Ox'y'$ déduits de Oxy par une rotation de l'angle a. L'axe Ox' passe par M. Il s'ensuit que les coordonnées de M' par rapport à $Ox'y'$ sont $\cos b$ et $\sin b$. Quant aux coordonnées par rapport à Oxy, ce sont $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. Appliquons, dès lors, les formules du changement de coordonnées (t. II, n° 34) :

$$(22)\qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$(23)\qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Telles sont les *formules fondamentales d'addition des arcs*.

On en déduit, par division,

$$(24)\qquad \operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$$

et, par le changement de b en $-b$,

$$(25)\qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$(26)\qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$(27)\qquad \operatorname{tang}(a-b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

126. *Généralisation.* — En appliquant un nombre suffisant de fois les formules précédentes, on peut arriver à calculer les lignes trigonométriques de la somme d'un nombre quelconque d'arcs. Pour établir des formules générales, il est toutefois plus commode d'employer la méthode analytique suivante.

Partons de la formule (t. I, n° 33)

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\cos(a+b+c+\ldots+l) + i\sin(a+b+c+\ldots+l) \\ &\quad = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)(\cos c + i\sin c)\ldots(\cos l + i\sin l) \\ &\quad = \cos a \cos b \ldots \cos l \\ &\qquad \times (1 + i\operatorname{tang} a)(1 + i\operatorname{tang} b)(1 + i\operatorname{tang} c)\ldots(1 + i\operatorname{tang} l). \end{aligned}$$

Développons le produit du dernier membre. En désignant par S_p la somme des produits p à p des nombres $\operatorname{tang} a$, $\operatorname{tang} b$, ..., $\operatorname{tang} l$, puis en égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

les formules cherchées :

$$(29)\quad \cos(a+b+c+\ldots+l) = \cos a \cos b \ldots \cos l\,(1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots),$$

$$(30)\quad \sin(a+b+c+\ldots+l) = \cos a \cos b \ldots \cos l\,(S_1 - S_3 + S_5 - \ldots).$$

En divisant membre à membre, on a enfin

$$(31)\qquad \operatorname{tang}(a+b+c+\ldots+l) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - \ldots}{1 - S_2 + S_4 - \ldots}.$$

127. Multiplication des arcs. — Si, dans les formules (29), (30), (31), on suppose que tous les arcs sont égaux et au nombre de m, on a

$$(32)\quad \cos ma = \cos^m a\,(1 - C_m^2 \operatorname{tang}^2 a + C_m^4 \operatorname{tang}^4 a - \ldots),$$

$$(33)\quad \sin ma = \cos^m a\,(C_m^1 \operatorname{tang} a - C_m^3 \operatorname{tang}^3 a + C_m^5 \operatorname{tang}^5 a - \ldots),$$

$$(34)\quad \operatorname{tang} ma = \frac{C_m^1 \operatorname{tang} a - C_m^3 \operatorname{tang}^3 a \ldots}{1 - C_m^2 \operatorname{tang}^2 a \ldots}.$$

128. Division des arcs. — PROBLÈME I. — *Connaissant* $\cos a$, *calculer* $\cos \frac{a}{m}$. — Au point de vue pratique, pour résoudre ce problème, on procède de la manière suivante. Au moyen d'une table de logarithmes, on calcule l'un des arcs a_0, qui admettent le cosinus donné. Tous les autres sont donnés par la formule (2); on en déduit

$$(35)\qquad \frac{a}{m} = \pm \frac{a_0}{m} + \frac{2k\pi}{m};$$

puis,

$$(36)\qquad x = \cos \frac{a}{m} = \cos\left(\pm \frac{a_0}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right).$$

Cherchons combien il y a de valeurs distinctes de x. Prenons d'abord le signe $+$. En augmentant k de m, nous augmentons $\frac{a}{m}$ de 2π; nous retombons donc sur la même valeur de x. Il nous suffit donc déjà de donner à k m valeurs entières consécutives, par exemple $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Les m valeurs correspondantes de x sont, en général, distinctes. En effet, comme les valeurs de $\frac{a}{m}$ ne peuvent différer que d'une quantité inférieure à 2π, si deux nombres k et k' donnaient la même valeur pour x, les arcs correspondants auraient nécessairement pour somme un multiple de 2π et l'on

aurait une égalité de la forme

$$2\frac{a_0}{m}+\frac{2(k+k')\pi}{m}=2p\pi$$

ou

$$a_0=(pm-k-k')\pi.$$

Cette particularité ne se présente que si le cosinus donné est égal à ± 1. Nous laissons au lecteur le soin de pousser la discussion jusqu'au bout dans cette hypothèse et de reconnaître qu'après suppression des racines ± 1, les valeurs de x précédemment obtenues sont deux à deux égales.

Si nous prenons maintenant le signe — dans la formule (36), nous retombons sur les mêmes valeurs de x. Si, en effet, on associe à la valeur k, prise avec le signe +, la valeur k', prise avec le signe — et telle que $k+k'=m$, les deux arcs correspondants ont pour somme 2π et ont, par conséquent, le même cosinus.

En définitive, nous obtenons *m valeurs distinctes pour x*, sauf si le cosinus donné est égal à ± 1, auquel cas les valeurs de x deviennent deux à deux égales.

Il résulte de cette discussion sommaire que l'équation qui doit donner x doit être une équation algébrique de degré m et ayant toutes ses racines réelles. Il est aisé de vérifier la première de ces deux assertions, car, en partant de la formule (32) et appelant b le cosinus donné, on trouve sans difficulté l'équation suivante :

$$(37)\qquad x^m - C_m^2 x^{m-2}(1-x^2)+C_m^4 x^{m-4}(1-x^2)^2-\ldots-b=0.$$

Quant à la réalité des racines, elle serait plus difficile à démontrer. Cette démonstration ne présenterait d'ailleurs aucun intérêt pratique et devrait être regardée comme un pur exercice d'algèbre. Nous ne nous en occuperons donc pas.

129. Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré. — La considération de l'équation (37) n'offre non plus aucun intérêt au point de vue de la résolution pratique du problème envisagé au numéro précédent. Sa seule raison d'être est, au contraire, que la Trigonométrie permet de résoudre très aisément toute équation algébrique se présentant sous cette forme ou pouvant s'y ramener. C'est ainsi qu'on apprend, en Mathématiques élémentaires, à résoudre trigonométriquement l'équation du second degré. Nous allons montrer

qu'on peut également résoudre, par un procédé analogue, l'équation générale du troisième degré.

Dans l'équation (37), supposons $m = 3$; elle devient

$$4x^3 - 3x - b = 0. \tag{38}$$

Nous obtenons une équation du troisième degré de la forme canonique (t. I, n° 265); mais, ce n'est pas la plus générale. Essayons donc de ramener à la forme (38) l'équation générale

$$x^3 + px + q = 0. \tag{39}$$

A cet effet, faisons le changement de variable

$$x = my, \tag{40}$$

m désignant une constante que nous déterminerons dans la suite. L'équation (39) devient

$$m^3y^3 + pmy + q = 0. \tag{41}$$

Essayons de l'identifier avec l'équation (38) :

$$\frac{m^3}{4} = \frac{pm}{-3} = \frac{q}{-b}. \tag{42}$$

Des deux premiers rapports, nous tirons la valeur de la constante m :

$$m = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}; \tag{43}$$

les deux derniers rapports nous donnent ensuite

$$b = \frac{3q}{mp}. \tag{44}$$

L'identification est donc toujours possible, si p est négatif. Mais, il faut, en outre, pour qu'on puisse faire la résolution trigonométrique, que b soit compris entre $+1$ et -1, c'est-à-dire que l'on ait

$$9q^2 < m^2p^2$$

ou

$$4p^3 + 27q^2 < 0. \tag{45}$$

On reconnaît la condition de réalité des trois racines de (39) (t. I, n° 265), qu'il fallait d'ailleurs s'attendre à retrouver, puisque l'équation (38) a nécessairement ses trois racines réelles.

En définitive, *toute équation du troisième degré qui a ses trois racines réelles peut être résolue trigonométriquement* de la manière suivante :

On calcule m, puis b, par les formules (43) et (44) ; on calcule un angle α ayant pour cosinus b ; on calcule ensuite les cosinus des angles $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\alpha}{3}+120^\circ$, $\frac{\alpha}{3}-120^\circ$ et l'on multiplie ces cosinus par m ; on obtient alors les trois racines de l'équation (39).

130. Problème II. — *Connaissant* $\sin a$, *calculer* $\cos\frac{a}{m}$. — La méthode pratique est analogue à celle du n° **128**. On en déduit qu'il y a toujours m solutions, qui peuvent se confondre deux à deux, lorsque la valeur donnée pour $\sin a$ est nulle. On peut écrire une équation analogue à (37), en partant de la formule (33).

Problème III. — *Connaissant* $\cos a$ *ou* $\sin a$, *calculer* $\sin\frac{a}{m}$. — On emploie toujours la même méthode pratique. Mais, cette fois, il y a m ou $2m$ solutions suivant la parité de m. On le constate, en faisant la discussion de la résolution trigonométrique ou bien en écrivant l'équation algébrique en x, déduite des formules (32) ou (33).

Problème IV. — *Connaissant* $\operatorname{tang} a$, *calculer* $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$. — On emploie toujours une méthode pratique analogue à celle du n° **128**. Il y a m solutions distinctes et l'équation algébrique en x est donnée par la formule (34).

131. Transformation des sommes en produits et inversement. — Une autre application classique des formules d'addition est la suivante.

Combinons par addition et soustraction les formules (22) et (25) d'une part, (23) et (26) d'autre part. Nous obtenons

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b, \tag{46}$$

$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\sin b, \tag{47}$$

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b, \tag{48}$$

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a. \tag{49}$$

Ces formules permettent de transformer les produits de sinus et

cosinus en sommes algébriques de sinus et cosinus, ce qui est utile, en particulier, dans le calcul de certaines quadratures (t. I, n° 169).

Elles permettent aussi de résoudre le problème inverse. Posons

$$a+b=p,\qquad a-b=q;\qquad a=\frac{p+q}{2},\qquad b=\frac{p-q}{2};$$

les formules (46) à (49) deviennent

$$(50)\qquad \cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

$$(51)\qquad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$(52)\qquad \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

$$(53)\qquad \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}.$$

Le principal intérêt de ces formules réside dans ce fait que les seconds membres sont calculables par logarithmes.

On peut en déduire un procédé pour rendre calculable par logarithmes une somme quelconque :

$$S=a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right);$$

on pose $\frac{b}{a}=\operatorname{tang}\varphi$ et S s'écrit

$$S=\frac{a}{\cos\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)=\frac{a}{\cos\varphi}\left[\cos\varphi+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$$

$$=\frac{2a\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\cos\varphi}.$$

132. Formules relatives à la duplication des arcs. — Appliquons les formules (32), (33), (34) dans le cas $m=2$. Il vient

$$(54)\qquad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a,$$

$$(55)\qquad \sin 2a=2\sin a\cos a,$$

$$(56)\qquad \operatorname{tang} 2a=\frac{2\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang}^2 a}.$$

En tenant compte de la formule (5), la formule (54) peut encore se mettre sous les formes suivantes :

$$(57)\qquad \cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a,$$

$$(58)\qquad \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2},\qquad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Si, dans (54) et (55), on remplace a par $\frac{a}{2}$, on peut écrire, en utilisant (9) et posant $\operatorname{tang}\frac{a}{2} = t$,

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2}\left(1 - \operatorname{tang}^2\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \tag{59}$$

$$\sin a = \cos^2\frac{a}{2}\,2t = \frac{2t}{1 + t^2}, \tag{60}$$

formules élémentaires bien connues, dont on a pu apprécier toute l'importance dans le calcul intégral et aussi en Géométrie analytique.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

133. Formules fondamentales. — Un triangle ABC possède six éléments : ses trois côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et ses trois angles A, B, C, que nous considérerons toujours comme positifs et $< \pi$.

Si l'on se donne trois quelconques de ces six éléments (à l'exception des trois angles), on peut construire le triangle et, par suite, les trois autres éléments sont déterminés. Il doit donc, *a priori*, exister trois relations indépendantes entre les six éléments d'un triangle quelconque. Bien entendu, on peut en déduire une infinité d'autres relations et, parmi toutes ces relations, on peut toujours imaginer qu'on en choisisse trois formant un système indépendant. Il y a donc certainement bien des manières d'écrire un tel système. Nous allons en indiquer trois, qui sont les formules fondamentales classiques servant de base à la résolution des triangles.

134. *Premier groupe.* — Projetons le contour BAC et sa résultante BC sur la droite BC, orientée de B vers C. Nous avons

$$a = c \cos B + b \cos C. \tag{1}$$

En permutant circulairement les grandes lettres et les petites lettres, on obtient deux autres formules analogues, qui, avec (1), constituent ce que nous appellerons le premier groupe.

Deuxième groupe. — Faisons le carré scalaire (t. II, n° 104) de l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}. \tag{2}$$

Nous obtenons, en remarquant que l'angle des deux vecteurs est $\pi - A$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{3}$$

Par permutations circulaires, on obtiendrait les deux autres formules du deuxième groupe.

Troisième groupe. — Considérons le cercle circonscrit au triangle et prenons le point B′ diamétralement opposé à B. L'angle BCB′ est droit et le triangle rectangle BCB′ nous donne ([1])

$$a = 2R\sin A, \tag{4}$$

en appelant R le rayon du cercle circonscrit et remarquant que les angles BB′C et BAC sont égaux ou supplémentaires.

En permutant circulairement, on a deux autres formules analogues. En éliminant la variable auxiliaire R, on obtient

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{5}$$

A ces deux formules, on joint

$$A + B + C = \pi, \tag{6}$$

et l'on a le troisième groupe.

Chacun de ces trois groupes est un système fondamental et nous laissons au lecteur le soin de vérifier, à titre d'exercice, qu'on peut effectivement déduire deux quelconques d'entre eux du troisième.

135. Résolution des triangles. — Résoudre un triangle, c'est calculer tous ses éléments, quand on connaît trois d'entre eux, ou, plus généralement, quand on l'assujettit à trois conditions simples indépendantes. Nous nous bornerons ici à examiner rapidement les cas classiques où l'on ne donne que des côtés ou des angles. Nous suivrons le même ordre que pour la résolution des trièdres.

Premier cas : On donne les trois côtés. — On a immédiatement les trois angles par l'application des formules du deuxième groupe :

([1]) Nous supposons connues les formules relatives aux triangles rectangles, qui s'établissent immédiatement en projetant l'hypoténuse sur un côté de l'angle droit.

par exemple,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Au point de vue des calculs numériques, il convient de rendre les formules calculables par logarithmes. A cet effet, on emploie l'artifice suivant. On a

$$1 - \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Posons

(7) $$a + b + c = 2p;$$

il vient, en utilisant la formule (58) du n° **132**,

(8) $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

En formant de même la combinaison $1 - \cos A$, on trouve

(9) $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

En divisant (9) par (8), on a enfin

(10) $$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Devant chacun de ces radicaux, il faut prendre le signe $+$, car $\frac{A}{2}$ devant être compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, ses trois lignes trigonométriques doivent être positives.

La seule condition de possibilité du problème est, par exemple, que $\cos\frac{A}{2}$ soit réel et < 1, c'est-à-dire que $p - a$ soit positif ou

(11) $$a < b + c$$

et

$$p(p-a) < bc,$$

ou

$$(b+c)^2 - a^2 < 4bc, \qquad (b-c)^2 < a^2,$$

ou enfin

(12) $$a > |b - c|.$$

On retrouve, en (11) et (12), les inégalités bien connues auxquelles doivent satisfaire les trois côtés d'un triangle.

Bien que la résolution proprement dite du triangle soit terminée, signalons quelques autres formules classiques se rattachant à ce cas.

Si l'on applique la formule (4), on trouve

$$a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 4R\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc};$$

d'où

(13) $$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Calculons la surface S du triangle. Si nous remarquons que la hauteur issue du sommet B, par exemple, est égale à $c\sin A$, nous avons

(14) $$S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

En remplaçant $\sin A$ par $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ et tenant compte de (8) et (9), il vient

(15) $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

En comparant avec (13), on trouve la formule bien connue

(16) $$abc = 4RS,$$

qu'on peut d'ailleurs aussi déduire de (14) et de (4).

Enfin, si l'on décompose le triangle en une somme de trois triangles ayant pour bases ses trois côtés et pour sommet commun le centre du cercle inscrit, on a, en appelant r le rayon de ce cercle,

(17) $$S = pr;$$

d'où

(18) $$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

136. *Deuxième cas : On donne deux côtés b, c et l'angle compris* A. — Utilisons les formules du troisième groupe. Nous avons, pour calculer B et C, les deux équations

(19) $$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

(20) $$B + C = \pi - A.$$

Pour résoudre ce système d'une manière symétrique, introduisons l'inconnue auxiliaire

(21) $$B - C = u.$$

Pour mettre en évidence cette nouvelle quantité, introduisons les expressions $\sin B - \sin C$ et $\sin B + \sin C$:

$$\frac{\sin B - \sin C}{b - c} = \frac{\sin B + \sin C}{b + c},$$

ou, en appliquant les formules (52) et (53) du n° 131,

$$\frac{2 \sin \frac{B - C}{2} \cos \frac{B + C}{2}}{b - c} = \frac{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}{b + c},$$

d'où l'on tire, en se servant de (20),

(22) $$\operatorname{tang} \frac{u}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{A}{2}.$$

Cette formule permet de calculer, par logarithmes, l'angle u, dont il faut prendre la détermination comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. On a ensuite B et C par (20) et (21). Puis, le troisième côté a est donné par

(23) $$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

Toutes ces formules sont toujours applicables et, par conséquent, le problème est toujours possible.

137. *Troisième cas : On donne deux côtés a, b et l'angle A opposé à l'un d'eux.* — Nous avons

(24) $$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

ce qui donne B, puis C, d'après (6), et enfin c par la formule

(25) $$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Discussion. — On doit d'abord avoir, d'après (24),

(26) $$a \geq b \sin A.$$

Cette condition étant supposée remplie, la formule (24) donne, pour B, deux valeurs supplémentaires B' et $B'' = \pi - B'$, l'angle B' étant supposé aigu, pour fixer les idées.

Pour que la valeur de C donnée par (6) soit ensuite acceptable, il faut et il suffit qu'elle soit positive; on doit donc avoir

$$(27) \qquad B < \pi - A.$$

Pour interpréter cette inégalité au moyen des données, il faut nous servir de (24), ce qui introduit sin B et nous oblige à considérer deux cas suivant que B et $\pi - A$ sont aigus ou obtus, puisque le sinus varie comme l'angle, dans le premier cas et, dans le sens opposé, dans le second cas.

I. $A < \frac{\pi}{2}$. — L'angle B' convient toujours, puisqu'il est aigu et que $\pi - A$ est obtus. Quant à B'', il ne convient que si l'on a

$$\sin B'' > \sin(\pi - A),$$

ou

$$\sin B > \sin A,$$

ou, d'après (24),

$$(28) \qquad b > a.$$

Si cette inégalité est satisfaite, on aura deux solutions; sinon, on n'en aura qu'une, donnée par l'angle aigu B'.

II. $A > \frac{\pi}{2}$. — L'angle obtus B'' ne convient jamais. Pour que B' convienne, il faut et il suffit que

$$\sin B' < \sin(\pi - A)$$

ou

$$(29) \qquad b < a.$$

Si cette inégalité est satisfaite, on aura une solution; sinon, on n'en aura aucune.

138. *Quatrième cas : On donne un côté a et deux angles* B *et* C.

Observons d'abord que peu importe le choix des deux angles donnés, car le troisième est immédiatement connu par la formule (6).

Nous avons maintenant, d'après les formules du troisième groupe,

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}. \tag{30}$$

Ces formules sont toujours applicables et donnent toujours une seule solution.

139. **Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.** — On peut se poser, pour les triangles sphériques, les mêmes questions que pour les triangles rectilignes et établir la trigonométrie sphérique parallèlement à la trigonométrie rectiligne. Nous nous contenterons ici d'en donner la *formule* dite *fondamentale*.

Soit un triangle sphérique ABC. Appelons a, b, c ses côtés, c'est-à-dire les angles au centre BOC, COA, AOB, et A, B, C ses angles, c'est-à-dire les angles plans des dièdres BOAC, COBA, AOCB. Supposons que l'on connaisse b, c, A; on peut évidemment construire le triangle et, par suite, on doit pouvoir calculer tous ses autres éléments. Nous allons seulement calculer le troisième côté a.

A cet effet, prenons un axe des z dirigé de O vers A, un axe des x perpendiculaire, dans le plan AOB et du même côté que OB par rapport à Oz, enfin un axe des y perpendiculaire aux deux précédents et du même côté que OC par rapport au plan zOx. Les longitudes et colatitudes des demi-droites OB et OC sont respectivement $(0, c)$ et (A, b). Leurs cosinus directeurs sont donc (t. II, n° 30)

$$\sin c,\ 0,\ \cos c \quad \text{et} \quad \sin b \cos A,\ \sin b \sin A,\ \cos b.$$

Nous aurons l'angle a de ces deux demi-droites, en appliquant la formule (21) du n° 31 du Tome II :

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b. \tag{31}$$

Telle est la formule connue sous le nom de formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique.

NOTE

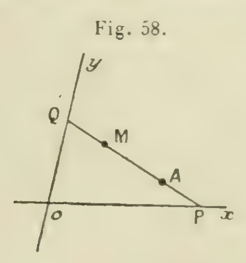
SUR

LA CONSTRUCTION DES CONIQUES DANS LES ÉPURES

140. Il arrive fréquemment, dans les épures, que l'on ait à construire une conique. Bien qu'il existe dans le commerce des instruments permettant le tracé continu de ces lignes, on se contente généralement de les construire par points. Nous allons indiquer les procédés qui nous paraissent les plus pratiques pour effectuer cette construction.

141. Hyperbole. — C'est généralement le cas le plus avantageux, car nous avons vu, à différentes reprises, qu'on pouvait facilement en trouver les asymptotes et un point. On a ensuite autant de points qu'on veut, en s'appuyant sur le théorème II du n° 541 du Tome II. Si A est le point connu (*fig.* 58), on mène une sécante quelconque

Fig. 58.



passant par ce point et l'on porte $\overline{QM} = \overline{AP}$. Le point M appartient à l'hyperbole.

Cette construction peut se faire en traçant effectivement la sécante au crayon et reportant la longueur AP avec le compas à pointes sèches. Cela a l'inconvénient d'embrouiller la figure, quand on veut avoir un grand nombre de points. On peut aussi se contenter de faire

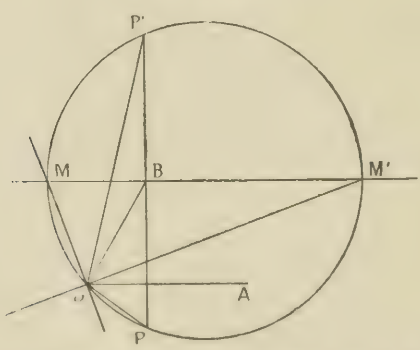
passer un double-décimètre par le point A. On compte le nombre de millimètres compris entre A et Ox. Puis, partant de Oy, dans le sens convenable, on compte un nombre de millimètres égal au nombre trouvé précédemment et l'on marque, avec la pointe du crayon, le point M qui se trouve en face de la division à laquelle on a abouti. Ce procédé évite l'inconvénient signalé plus haut. Mais, il est assez peu précis, à cause des erreurs qu'on commet inévitablement, en interpolant les millimètres.

142. **Ellipse**. — Quand on connaît les axes, le procédé le plus rapide est celui dit *de la bande de papier* (t. II, n° 540).

Mais, il arrive fréquemment que l'on connaisse seulement deux diamètres conjugués. Si l'ellipse est de grandes dimensions et nécessite, par suite, la détermination d'un grand nombre de points, il y a avantage à construire les axes, pour appliquer ensuite le procédé précédent. Cette construction a été indiquée dans l'Exercice résolu n° 2 du Chapitre XXXV du Tome II. Rappelons la règle, sans démonstration.

Soient OA et OB les deux diamètres conjugués (*fig.* 59). On

Fig. 59.

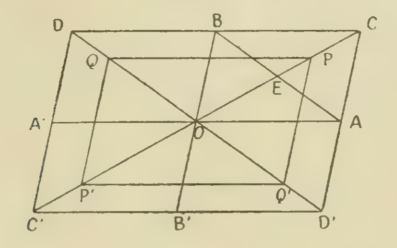


mène par B une parallèle et une perpendiculaire à OA. Sur la perpendiculaire on porte $BP = BP' = OA$. Puis, on trace la circonférence circonscrite au triangle POP'. Elle rencontre la parallèle à OA en deux points M et M'. Les droites OM et OM' donnent les directions des deux axes. Leurs longueurs sont $OP + OP'$ et $OP' - OP$, le grand axe devant se trouver dans l'angle aigu des deux diamètres.

Si l'ellipse est de petites dimensions, il suffit généralement, pour qu'on puisse la tracer avec une exactitude pratiquement suffisante, d'en déterminer quelques points, autres que les extrémités A, B, A′, B′ des diamètres donnés. On peut d'abord construire facilement les points de rencontre de l'ellipse avec les diagonales du parallélogramme formé par les tangentes en A, B, A′ B′. On a, par exemple, en remarquant que AB est la polaire de C (*fig.* 60),

$$\overline{OP}^2 = \overline{OE}\cdot\overline{OC} = \frac{OC^2}{2}; \qquad OP = \frac{OC}{\sqrt{2}},$$

Fig. 60.



longueur facile à construire. Ayant le point P, on en déduit les trois autres points analogues, en achevant le parallélogramme PQP′Q′, dont on connaît les diagonales CC′ et DD′. On trace enfin les tangentes en tous ces points, en remarquant que la tangente en P, par exemple, est parallèle à AB.

D'autres points faciles à construire sont ceux dont les coordonnées par rapport aux axes AOB sont $\left(\pm\frac{4}{5}OA, \pm\frac{3}{5}OB\right)$ et $\left(\pm\frac{3}{5}OA, \pm\frac{4}{5}OB\right)$, car il est aisé de vérifier que ces coordonnées satisfont bien à l'équation de l'ellipse rapportée à ses deux diamètres conjugués. La tangente au point M $\left(\frac{4}{5}OA, \frac{3}{5}OB\right)$, par exemple, rencontre OA au point T tel que $OT = \frac{5}{4}OA$.

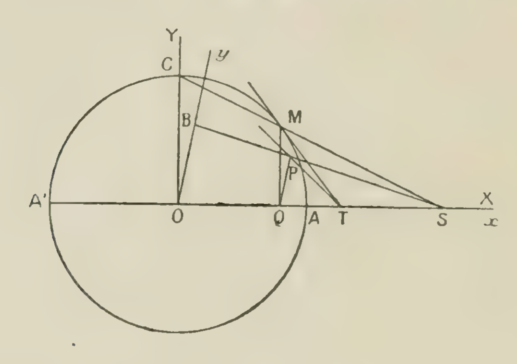
En combinant les deux méthodes précédentes, on voit qu'on pourra obtenir 12 nouveaux points, avec leurs tangentes. En leur ajoutant A, B, A′, B′, on aura donc, en tout, 16 points et leurs tangentes, ce qui équivaut à 32 points. Cela sera généralement suffisant pour exécuter un bon tracé de la courbe.

Si l'on veut encore d'autres points, on peut employer la méthode

suivante. Traçons la circonférence de diamètre AA'. Prenons-y un point M quelconque. Projetons-le en Q sur OA. Menons QP parallèle à OB et prenons son intersection P avec SB, S désignant le point de rencontre de CM avec OA. Le point P appartient à l'ellipse.

En effet, si l'on appelle (x, y) ses coordonnées par rapport aux axes Oxy (*fig.* 61) et (X, Y) les coordonnées de M par rapport aux

Fig. 61.



axes rectangulaires OXY, on a

$$(1) \qquad x = X, \qquad \frac{y}{b} = \frac{SQ}{SO} = \frac{Y}{a},$$

en posant $OA = a$, $OB = b$. Or,

$$X^2 + Y^2 = a^2;$$

donc,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ce qui est l'équation de l'ellipse rapportée aux axes Oxy. Les formules (1) définissent une transformation homographique, admettant Ox pour ligne de points doubles (puisque y et Y s'annulent en même temps). Il s'ensuit que la tangente en M au cercle et la tangente en P à l'ellipse, qui sont des droites homologues, se coupent en un point T de Ox. De là résulte une construction évidente de la tangente en P (*cf.* t. II, n° 539).

143. **Parabole.** — Supposons-la déterminée par un diamètre Ox, la tangente Oy à l'extrémité de ce diamètre et un point P. Soient (a, b) les coordonnées de ce point. L'équation de la parabole peut

s'écrire

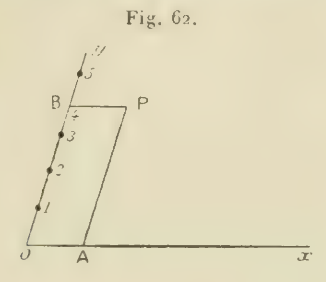
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}. \tag{2}$$

On peut y satisfaire identiquement en posant

$$y = \frac{p}{q} b, \qquad x = \frac{p^2}{q^2} a, \tag{3}$$

p et q désignant deux entiers quelconques. Dès lors, divisons OB (*fig.* 62) en q parties égales et numérotons les points de division

Fig. 62.



dans l'ordre naturel, de O vers B, en prolongeant la graduation au delà de B, si cela est nécessaire. Puis, divisons OA en q^2 parties égales et numérotons les points de division, en marquant 1 au premier point, 2 au quatrième, 3 au neuvième, 4 au seizième, etc. ([1]). Les parallèles à Ox menées par les points de la première graduation rencontrent les parallèles à Oy menées par les points de même numéro de la deuxième graduation en des points qui appartiennent à la parabole. Ces points sont d'autant plus rapprochés que le nombre q est plus grand. Ajoutons enfin qu'il est facile d'avoir la tangente en chacun d'eux, en utilisant la propriété bien connue de la soustangente (t. II, n° 545).

([1]) On peut évidemment se dispenser de construire les points intermédiaires, qui ne servent à rien.

FIN DU TOME IV.

TABLE DES MATIÈRES.

68462 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
Quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
68465 Quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND
EXAMINATEUR SUPPLÉANT D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TOME IV.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET TRIGONOMÉTRIE.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

CHAPITRE II [1].

POLYÈDRES, PRISMES ET PYRAMIDES.

EXERCICES RÉSOLUS.

Pour l'énoncé des épures, nous ferons choix des axes de coordonnées auxiliaires suivants. L'axe des x sera la ligne de terre; l'axe des y sera la droite de bout dont la projection horizontale coïncide avec un des axes de la feuille et se dirige en avant du plan vertical; enfin, l'axe des z sera la verticale ascendante.

Pour les exercices résolus, les données seront évaluées en millimètres, à l'échelle de la figure. Pour les exercices proposés, les données seront également évaluées en millimètres; mais elles correspondront à une épure exécutée sur une feuille $\frac{1}{4}$ grand aigle. Si le lecteur veut exécuter lui-même, comme nous le lui conseillons, les épures des exercices résolus, il n'aura qu'à en tripler les dimensions.

1. [2] *Un cube a une diagonale verticale de longueur* 70,5; *le sommet le plus bas* H *de cette diagonale a pour coordonnées* (0, 47, 0). *Une des arêtes* AB, *issue du sommet le plus haut* A, *a une projection*

---

[1] Le Chapitre I du *Cours* ne comprenant que des généralités, il nous a paru inutile de lui faire correspondre un Chapitre d'*Exercices*.

[2] Cette épure est difficile; on pourra la laisser de côté à une première lecture.

horizontale inclinée à 45° sur la ligne de terre, l'abscisse et l'éloignement du point B *étant plus petits que l'abscisse et l'éloignement du point* A.

Un octaèdre régulier admet pour faces deux triangles équilatéraux IJK, LMN. *Le premier se trouve dans le plan horizontal et a pour centre* H, *le sommet* K *se trouvant en avant de ce point et le côté* IJ *étant parallèle à la ligne de terre. Le deuxième triangle se trouve dans le plan horizontal de cote* 47.

Représenter la partie commune à ces deux solides (*fig.* 1).

Construction du cube. — Un calcul facile de Géométrie élémentaire montre que le sommet B se projette sur la diagonale verticale au $\frac{1}{3}$ de AH, à partir de A et qu'il se trouve à une distance de cette diagonale égale à $\frac{AH\sqrt{2}}{3}$, c'est-à-dire égale à $23.5 \times \sqrt{2}$. On en déduit immédiatement la projection horizontale ab, puis la projection verticale $a'b'$ de AB. Le cube admet sa diagonale comme *axe de symétrie ternaire*, c'est-à-dire qu'il se superpose à lui-même après une rotation de 120° ou de 240° autour de cette diagonale. On en conclut que les projections horizontales c, d, e, f, g des cinq sommets non encore construits forment avec b un hexagone régulier. En projection verticale, d' et f' ont même cote que b' et c', e', g' ont une cote moitié moindre.

Construction de l'octaèdre. — Un calcul facile de Géométrie élémentaire (¹) montre que la hauteur h comprise entre deux faces parallèles d'un octaèdre régulier est liée à son côté a par la relation

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ici, $h = 47$; donc $a = \frac{47\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Le rayon ak du cercle circonscrit au triangle est donc égal à $23,5 \times \sqrt{2}$, c'est-à-dire égal à ab. Les triangles ijk et lmn sont donc inscrits dans le même cercle que l'hexagone $bcdefg$. Leur construction est, dès lors, immédiate. On en déduit ensuite les projections verticales $i'j'k'$ et $l'm'n'$. Il ne reste plus maintenant qu'à joindre les arêtes NJ, NI, KM, KL, IM, JL.

Construction de l'intersection. — De même que le cube, l'octaèdre

---

(¹) Considérer le tétraèdre trirectangle ayant pour base l'une des faces et pour sommet le centre de l'octaèdre. Sa hauteur égale $\frac{h}{2}$ et aussi $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

admet la verticale AH comme *axe de symétrie ternaire;* il en est donc de même de l'intersection. Dès lors, il nous suffit de construire, par exemple, les intersections de l'octaèdre avec les faces ABCD et HCDE du cube; le reste s'en déduira par deux rotations de 120° et de 240° autour de AH.

Écrivons le tableau rectangulaire qui donne les combinaisons des deux faces ci-dessus avec les huit faces de l'octaèdre :

	LMN.	KIJ.	KLM.	KMI.	KJL.	NIM.	NLJ.	NJI.
ABCD......	(1,2)	-	(2,3)	(20,21)	-	(1,21)	-	-
HCDE......	-	-	(3,4)	(20,19)	(4,5)	-	-	-

Commençons par marquer du signe - toutes les combinaisons qui ne *donnent certainement rien* dans l'intersection, parce que *les deux faces combinées n'ont aucun point commun dans une au moins des deux projections.* Nous avons aussi marqué du même signe la combinaison (HCDE, NIM), dont l'intersection est tout entière en dehors des deux faces correspondantes, ainsi qu'on s'en assure aisément en coupant, par exemple, par les plans horizontaux passant par C et par M.

Le plan LMN coupe la face ABCD suivant la diagonale BD. La partie intérieure au triangle LMN est le segment (12, 1′2′).

Le plan MIN coupe ABCD suivant une droite qui passe par le point 1; on en a un second en coupant par le plan horizontal qui passe par C: ce plan coupe ABCD suivant une parallèle à BD, projetée horizontalement en *cr*; il coupe NIM suivant une parallèle à NM passant par le milieu de MI et projetée horizontalement en *pr*; le point *r* est la projection horizontale du second point cherché. En joignant *r*1, on obtient le segment (1,21) limité à *mi* et projeté verticalement en (1′,21′).

L'intersection de ABCD avec KLM passe par le point 2; on en a un second en coupant par le même plan horizontal que précédemment; on obtient ainsi le point *s* situé sur *cr* et sur la droite *qs* joignant les milieux de *km* et *kl*. En joignant 2*s*, on obtient le segment 23 limité à *cd* et projeté verticalement en 2′3′.

L'intersection de ABCD avec KMI passe par le point 21 et par le point *u* où 23 rencontre *km*. Elle donne le segment (20,21), (20′,21′).

L'intersection de HCDE avec KLM passe par le point 3 et par le point *t*, intersection de *ce* et de *sq* (on a encore coupé par le plan horizontal précédent). Cela donne le segment (3,4), (3′,4′).

L'intersection de HCDE avec KMI passe par le point 20 et par le point *v*, intersection de *ce* et de *pq*. Elle donne le segment (20,19) limité à HC.

Enfin, l'intersection de HCDE avec KJL passe par le point 4 et par le point ω, obtenu en coupant par le plan horizontal de projection. D'où le segment 45 limité à HE.

Nous avons marqué, dans le tableau ci-dessus, tous les segments dont nous venons d'indiquer la construction.

En faisant les rotations de 120° et de 240°, nous en avons déduit 14 nouveaux segments; chaque nouveau point a reçu un numéro égal à l'ancien augmenté de 7 ou de 14.

Jonction des points. — Nous donnons ci-dessous le tableau de tous les points dans leur ordre de jonction, en indiquant, pour chacun d'eux, l'arête et la face auxquelles il appartient. Cela suffit pour se rendre compte que le numérotage est bien conforme à la règle du n° 14 :

1 (*mn*, *abcd*); 2 (*ml*, *abcd*); 3 (*mlk*, *cd*); 4 (*lk*, *hcde*); 5 (*klj*, *he*); 6 (*klj*, *ef*); 7 (*kl*, *adef*); 8 (*lm*, *adef*); 9 (*ln*, *adef*); 10 (*lnj*, *ef*); 11 (*jn*, *hefg*); 12 (*jni*, *hg*); 13 (*jni*, *gb*); 14 (*jn*, *afgb*); 15 (*nl*, *afgb*); 16 (*nm*, *afgb*); 17 (*nmi*, *gb*); 18 (*im*, *hgbc*); 19 (*imk*, *ac*); 20 (*imk*, *cd*); 21 (*im*, *abcd*).

Ponctuation. — Voici la liste des faces vues (¹) :

En projection horizontale : *abcd*, *adef*, *afgb*; *lmn*, *nim*, *nlj*, *lmk*.

En projection verticale : $a'b'c'd'$, $a'd'e'f'$, $h'c'd'e'$; $k'j'l'$, $k'i'm'$, $k'l'm'$.

En se servant du tableau précédent, qui indique sur quelles faces se trouve chaque sommet de la ligne d'intersection et utilisant la règle *a* du cas III du n° 11, on obtient immédiatement le tableau des côtés vus :

En projection horizontale : 1, 2; 2, 3; 3, 4; 6, 7; 7, 8; 8, 9; 9, 10; 10, 11; 13, 14; 14, 15; 15, 16; 16, 17; 17, 18; 20, 21; 21, 1.

En projection verticale : 1', 2'; 2', 3'; 3', 4'; 4', 5'; 5', 6'; 6', 7'; 7', 8'; 8', 9'; 9', 10'; 18', 19'; 19', 20'; 20', 21'; 21', 1'.

Voici enfin le tableau des arêtes ou portions d'arêtes qui doivent être conservées, les autres étant marquées en trait mixte :

h, 19; *h*, 5; *h*, 12; 3, 20; 10, 6; 17, 13; 2, 8; 9, 15; 16, 1; 14, 11; 21, 18; 7, 4.

(¹) Il n'y a aucune difficulté à reconnaître successivement les différentes faces au point de vue de la visibilité. On peut aussi appliquer les théorèmes du n° 12. Pour le cube, en projection horizontale, par exemple, H est caché; donc, aussi toutes les faces issues de ce sommet (Théorème II); A est vu et ne fait pas partie du contour apparent; donc, les trois faces qui en sont issues sont vues (Théorème III).

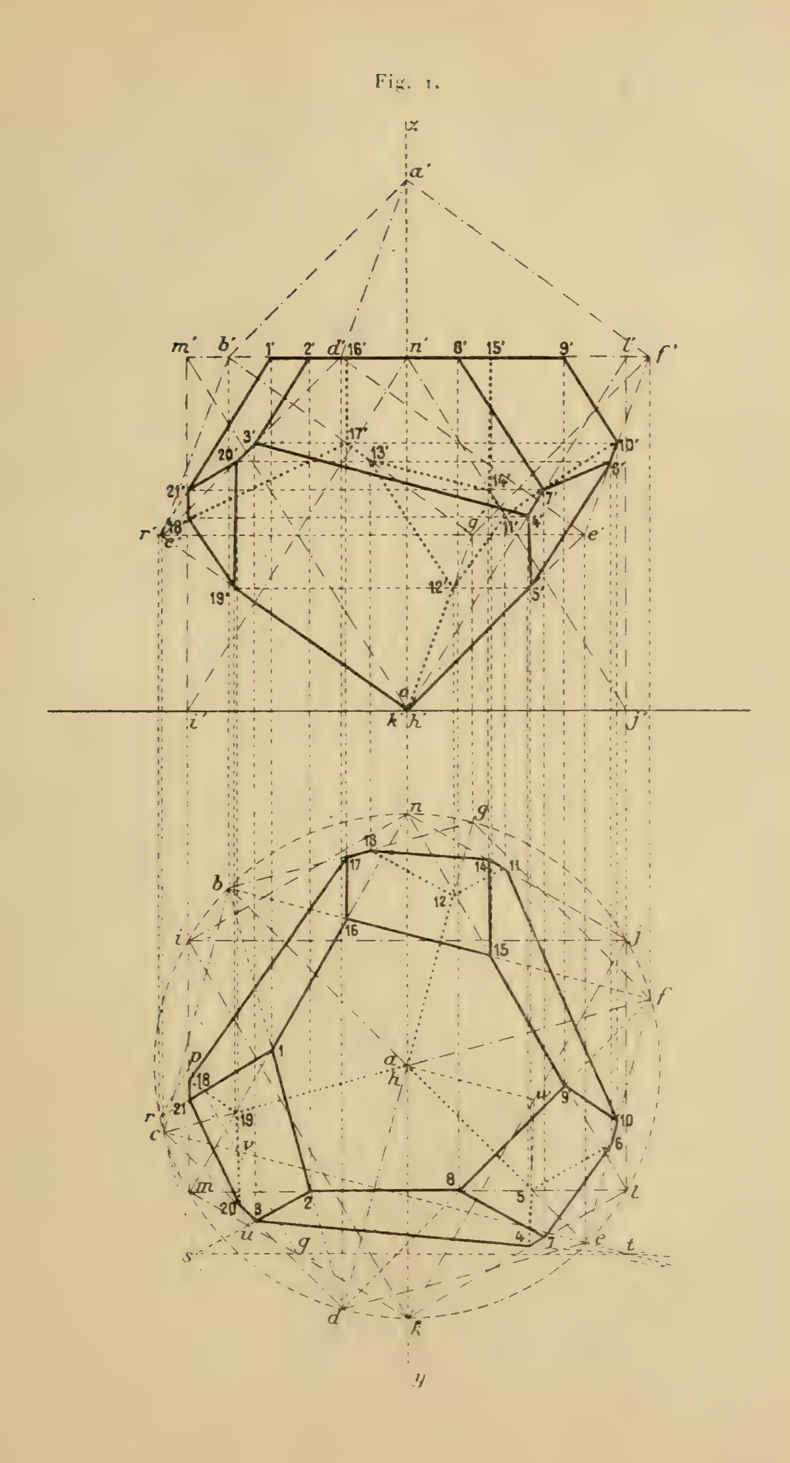

z
a'
m'
b'
1'
2'
d'
16'
n'
8'
15'
9'
l'
f'
3'
17'
10'
20'
13'
6'
21'
14'
7'
18'
11'
4'
r'
c'
g'
e'
12'
19'
5'
a
k'
h'
i'
j'
n
g
13
17
14
11
12
b
i
16
15
j
f
a
h
1
p
18
21
19
r
c
v
9
10
6
m
8
5
l
20
3
2
4
7
u
e
t
s
g
d
k
y

Fig. 1.

2. *Une pyramide a pour sommet le point* S(—54,0,88) *et pour base, dans le plan horizontal, un carré* ABCD, *dont les sommets* A *et* B *les plus rapprochés de la ligne de terre ont pour coordonnées respectives* (—10,36,0) *et* (26,30,0). *Une deuxième pyramide a pour sommet le point* $S_1(0,30,44)$ *et pour base, dans le plan horizontal, un triangle* $A_1B_1C_1$ *défini par les coordonnées* $A_1(-54,36,0)$, $B_1(-24,20,0)$, $C_1(-34,62,0)$. *Représenter l'ensemble de ces deux solides* (*fig.* 2).

Construction de l'intersection. — Nous appliquons la méthode générale du n° 16. La ligne des sommets perce le plan horizontal au point (σ, σ'). Les traces horizontales des plans auxiliaires passent toutes par σ. Les traces des plans limites sont σb_1 et σc_1. Les plans auxiliaires utiles sont b_1ef, akl, a_1gh, c_1ij. Ils donnent chacun deux points de l'intersection. Par exemple, le point 5 s'obtient en prenant l'intersection de sa et de s_1l; il se rappelle en 5′ sur $s'a'$.

Jonction des points. — Appliquons la méthode du n° 18. Partons du point 1, auquel correspondent, sur les bases, les points b_1 et e. Le sens de parcours sur *abcd* est nécessairement celui de e vers a, parce que e se trouve sur un plan limite pour S_1. Sur l'autre base, prenons le sens indiqué par la flèche. Nous obtenons successivement les points 2, 3, 4, 5 et nous retombons sur le point 1; le polygone est fermé. Mais, il reste encore trois points. Partons de l'un d'eux 6, auquel correspondent, sur les bases, b_1 et f. Sur *abcd*, nous allons nécessairement vers c; sur l'autre base, marchons toujours dans le sens de la flèche. Nous obtenons les points 7, 8 et nous retombons sur 6. Tous les points sont maintenant épuisés. L'intersection se compose de deux polygones fermés; *il y a pénétration* (n° 19).

Ponctuation. — Voici la liste des faces vues :

En projection horizontale : SBC, SCD; $S_1A_1B_1$, $S_1A_1C_1$.

En projection verticale : SAD, SDC; $S_1A_1C_1$, $S_1C_1B_1$.

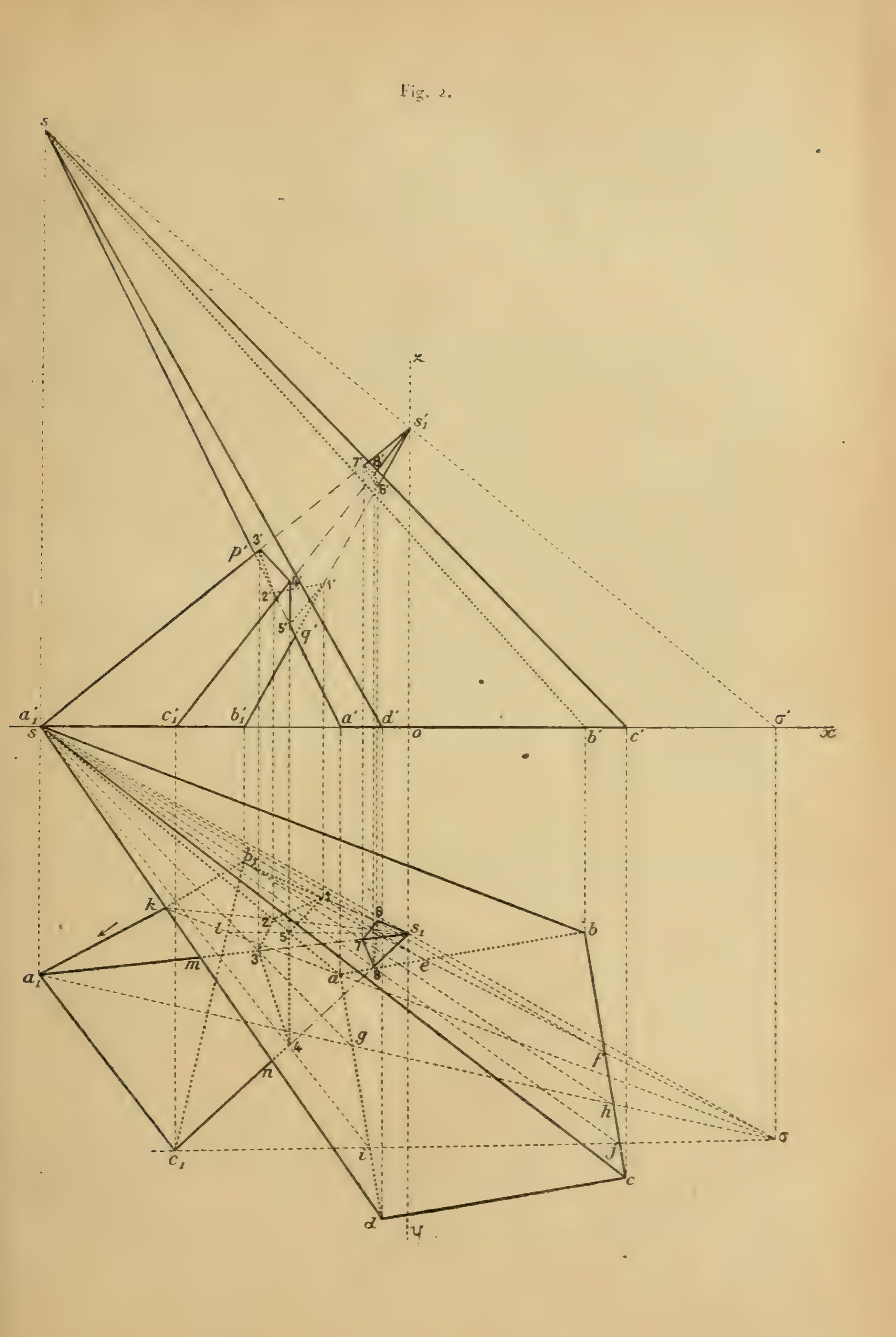
En projection horizontale, les points 1, 2, 3, 4, 5 sont tous cachés sur P; donc, le premier polygone est entièrement caché. Le côté 68 est caché sur P_1; les côtés 67 et 78 sont vus à la fois sur les deux pyramides; on les trace donc en trait plein.

En projection verticale, les côtés 12 et 51 et le triangle 678 sont cachés sur S. Le côté 23 est caché sur S_1. Enfin, 34 et 45 sont vus sur les deux solides, donc en trait plein.

Les portions d'arêtes à enlever sont 16, 48, 37 et 25.

En projection horizontale, signalons seulement que les portions

Fig. 2.


s
z
s'₁
7'
8'
6'
3'
p'
2'
1'
5'
q'
a'₁
c'₁
b'₁
a'
d'
o
b'
c'
σ'
x
s
b
1
k
2
5
6
s₁
l
7
3
m
a
e
8
a₁
g
4
f
n
h
σ
c₁
i
j
c
d
y

d'arêtes $3m$ et $4n$, bien que vues sur la pyramide P_1, à laquelle elles appartiennent, sont néanmoins cachées par la face SAD de P. Il en est de même pour la partie kb_1 de la base.

En projection verticale, on peut faire la même remarque pour $1'q'$, $2'p'$ et pour les portions d'arêtes de P_1 comprises entre $s'c'$ et les points $6'$, $7'$, $8'$.

3. *Un prisme* P_1 *a pour base, dans le plan horizontal, un triangle équilatéral* $A_1B_1C_1$, *dont les deux sommets les plus rapprochés de la ligne de terre ont pour coordonnées* $B_1(40, 4, 0)$; $C_1(4, 16, 0)$. *Ses génératrices sont de front et sont inclinées à* 60° *sur* Ox, *en montant de droite à gauche.*

Sur l'arête issue du sommet A_1, *on prend le point* E, *dans le plan* yOz. *Par ce point, on mène une droite dont les deux projections font* 45° *avec la ligne de terre, en montant de gauche à droite pour la projection verticale et descendant pour la projection horizontale. Cette droite perce le plan vertical au point* A. *Ce point est le sommet d'un triangle* ABC *du plan vertical, dont les sommets* B *et* C *ont pour coordonnées* $(-18, 0, 0)$ *et* $(-14, 0, 26)$. *On considère un second prisme* P, *dont* ABC *est la base et* AE *une arête. On le limite par une section droite admettant* E *pour sommet.*

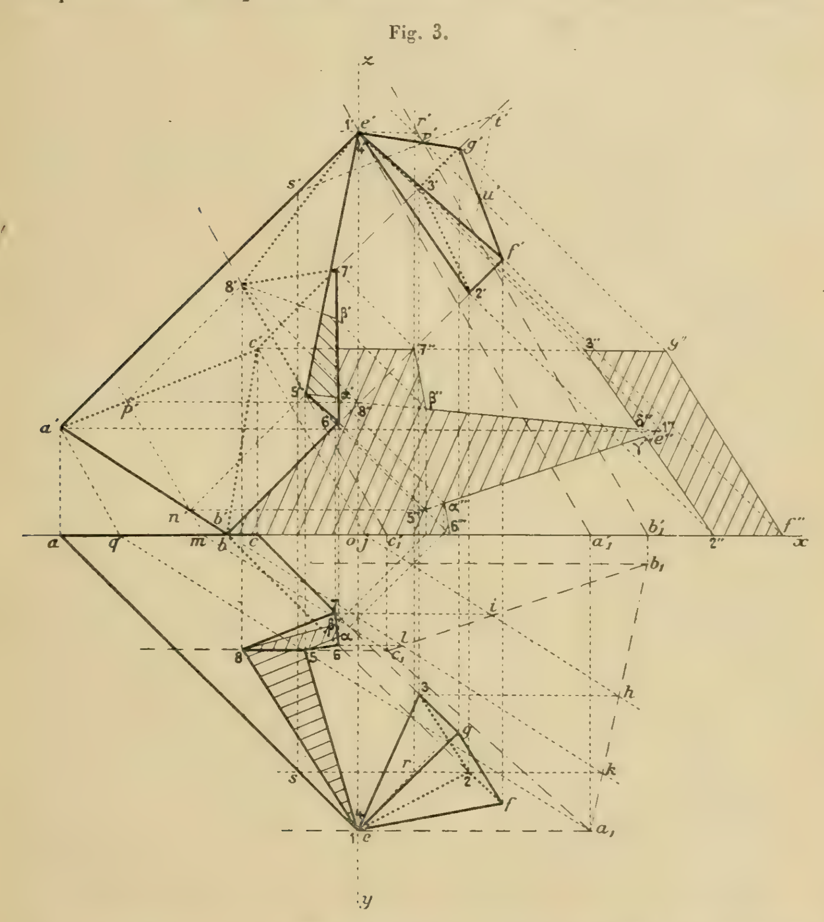
Représenter ce prisme entaillé par P_1, *ainsi que son ombre propre et son ombre portée sur le plan vertical, les rayons lumineux ayant leurs projections perpendiculaires aux projections de même nom des arêtes de* P (*fig.* 3).

Construction de l'intersection. — Cherchons la direction des plans auxiliaires. A cet effet, menons par E les parallèles aux arêtes des deux prismes (n° 16). Ce sont les arêtes EA et EA_1. La seconde étant de front, les traces verticales des plans auxiliaires sont parallèles à $e'a'_1$. En menant $a'q$ parallèle à cette direction, puis joignant qa_1, *on a les traces du plan auxiliaire* EAA_1, qui est *limite à la fois pour les deux prismes*. On a un deuxième plan limite $c'jih$ et deux autres plans auxiliaires utiles : $b'lk$ et $c_1mn'p'$. Ces trois plans donnent respectivement les points 3, 7; 6, 2; 5, 8.

Jonction des points. — Partons du point E, avec le numéro 1. Ce point est *à la rencontre de deux arêtes;* il est donc l'extrémité de quatre côtés différents du polygone d'intersection (n° 18) et nous pouvons faire notre départ de quatre manières différentes, en combinant les sens de parcours sur les deux polygones de base. Partons, par exemple, de A_1 vers B_1 et de A vers B; nous obtenons successivement

les points 2, 3 et nous revenons au point 1. Continuons maintenant à parcourir ABC dans le même sens; mais, changeons de sens sur l'autre base; nous obtenons les points 5, 6, 7, 8 et nous revenons en E. Tous les points sont, à présent, numérotés. *L'intersection est constituée*

Fig. 3.



par le triangle 123 *et par le pentagone gauche* 45678, les sommets 1 et 4 étant confondus. On est dans le *cas intermédiaire entre la pénétration et l'arrachement.*

Construction de la section droite. — Coupons par le plan de front *rs*; il coupe les faces EAC et GCB suivant les frontales projetées verticalement en $s't'$ et $t'u'$, parallèles à $a'c'$ et $c'b'$ et le plan de la section droite suivant la frontale dont la projection verticale $r'v'u'$ est perpen-

diculaire à $a'e'$ et passe par le point r' situé sur l'horizontale $(er, e'r')$. En joignant $e'c'$, on a la projection verticale de EG; puis, en joignant $g'u'$, on a $g'f'$; enfin, il ne reste plus qu'à joindre $e'f'$. Des lignes de rappel donnent les projections horizontales f et g.

Ponctuation. — Voici la liste des faces vues :

En projection horizontale, ACEG, EFG.

En projection verticale, ABFE, EFG.

En projection horizontale, les côtés 78, 81, 13 sont vus comme appartenant à la face ACEG; les côtés 45, 56, 67 sont vus comme contour apparent, bien qu'appartenant à des faces cachées (*cf.* n° 11, II, *c*; la partie solide du prisme P qui cachait primitivement ces segments est enlevée par la suppression du prisme P_1).

En projection verticale, $1'2'$, $4'5'$ et $5'6'$ sont vus comme appartenant à ABFE; $6'7'$ et une petite partie de $7'8'$ sont vus comme contour apparent.

Il faut enlever les portions d'arêtes 62 et 73. Des arêtes de P_1, on ne conserve que le segment 58, vu en projection horizontale et caché en projection verticale.

Ombres. — Les rayons lumineux et les arêtes de P sont parallèles au premier bissecteur; il s'ensuit que tout plan de rayons lumineux s'appuyant sur une arête de P a une trace verticale parallèle à la ligne de terre; on en a, d'autre part, un point, en prenant la trace de cette arête. On obtient donc immédiatement les *ombres portées par les trois faces sur le plan vertical.* (Les ombres portées sur le plan horizontal sont toutes en arrière du plan vertical et, par suite, ne sont pas vues.) Pour délimiter l'ombre portée par la face BCGF, par exemple, on mène $g'g''$ parallèle à la projection verticale des rayons lumineux et l'on prend son intersection avec $c'g''$ parallèle à la ligne de terre; on obtient ainsi le point g''. On construit, de même, les points $3''$, $7''$, f'', $2''$, $6''$. L'ombre cherchée se compose des deux trapèzes $c'7''6''b'$ et $3''g''f''2''$. De même, les ombres portées par les parties non enlevées des faces BAEF et AEGC se composent du pentagone $b'a'1''5''6''b'$, du triangle $1''2''f''$, du pentagone $a'c'7''8''1''a'$ et du triangle $1''3''g''$. Il faut couvrir de hachures *toute aire intérieure à l'un au moins de ces polygones.*

Quant à l'*ombre propre du prisme*, elle comprend d'abord la base ABC et la face BCGF; mais, toutes deux sont cachées dans les deux projections; on ne les couvre pas de hachures. Il faut ensuite s'occuper de la *surface de l'entaille*, qui est constituée par certaines parties des faces de P_1.

Prenons le triangle 581. Son ombre portée $5''8''1''$ est tout entière dans l'ombre portée par les faces BAEF et CAEG. Comme ces faces sont

éclairées, elles arrêtent certainement les rayons lumineux qui devraient rencontrer le triangle, lequel est, par suite, dans l'ombre. *Sa projection horizontale*, qui est seule vue, *doit donc être couverte de hachures.*

Prenons maintenant *le quadrilatère* 5678. Dans son ombre portée, nous avons les deux triangles $5''6''\alpha''$ et $7''8''3''$ qui sont extérieurs aux ombres portées par les faces BAEF et ACGE. Les rayons lumineux qui les traversent ne sont donc pas arrêtés par ces faces et *les triangles* 56α *et* 783 *sont éclairés.* Au contraire, *le trapèze* 583α *est dans l'ombre.*

Le triangle $1''7''\delta''$ conduirait, de même, à une ombre portée sur le triangle 123; mais, comme ce triangle est caché dans les deux projections, cela ne présente aucun intérêt.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Un cube a une face dans le plan horizontal. Le centre C de cette face a pour coordonnées (0,100,0) et l'un des sommets (60,60,0). Un octaèdre régulier a une diagonale verticale, dont une extrémité est le point C précédent et l'autre a pour cote 140. La trace horizontale d'un des deux plans diagonaux passant par cette diagonale a pour coefficient angulaire $\frac{1}{2}$ par rapport aux axes xOy.

Représenter le cube entaillé par l'octaèdre, ainsi que son ombre propre et les ombres qu'il porte sur les deux plans de projection.

2. Un octaèdre régulier a une face dans le plan horizontal, dont le centre et un sommet ont pour coordonnées respectives (0,120,0) et (0,220,0). Un tétraèdre régulier a un sommet au centre de l'octaèdre; la hauteur issue de ce sommet est verticale et dirigée vers le haut; elle a 140 de longueur. Une des arêtes issues du même sommet se projette horizontalement suivant une droite de coefficient angulaire $\frac{3}{2}$.

Représenter le solide commun, avec son ombre propre.

3. Dans le plan horizontal, on donne le rectangle ABCD; les sommets A et B ont pour coordonnées respectives (— 100,75,0) et (100,5,0); le sommet C du côté BC a pour abscisse 140. Sur le grand axe de ce rectangle, on prend un segment *ef* ayant pour milieu le centre du rectangle et pour longueur 140; on considère, dans l'espace, le segment EF horizontal, projeté horizontalement en *ef* et de cote 100. Les triangles EAD, FBC, les trapèzes ABFE, DEFC et le rectangle ABCD limitent un solide S.

On donne ensuite les deux points G(— 20,100,40) et H(— 110,120,60) et l'on considère un cube admettant GH pour arête, le plan diagonal

contenant cette arête étant supposé vertical et G étant le sommet le plus rapproché du plan horizontal.

Représenter l'ensemble des deux solides.

4. Un tétraèdre régulier ABCD a ses deux arêtes opposées AC et BD horizontales. Son centre G a pour coordonnées (— 90,110,150). L'arête la plus basse BD a une projection horizontale de coefficient angulaire 0,7. Elle a pour longueur 170.

Dans le plan horizontal, un carré a pour centre le point I(70,110,0) et pour sommet le point E(30,30,0). Il sert de base à une pyramide dont le sommet se trouve sur la droite IG et a pour cote 200.

Représenter le solide commun.

5. Un triangle équilatéral du plan horizontal a pour centre le point G(80,140,0) et pour sommet le point A(80,60,0). Il est la base d'une pyramide dont le sommet a pour coordonnées (— 20,40,120).

Un hexagone régulier, de côté 60, se trouve également dans le plan horizontal et a pour centre le point (— 80,140,0). Une de ses diagonales a pour angle polaire — 45° par rapport à Ox. Cet hexagone sert de base à un prisme, dont les arêtes ont pour angle polaire — 30° en projection horizontale et 45° en projection verticale et qui est limité par la section droite dont le plan passe par le point de cote 150 pris sur la parallèle aux arêtes menée par le centre de l'hexagone.

Représenter l'ensemble des deux solides.

6. Deux poutres identiques ont pour section droite un carré de côté 120, dont on a enlevé, aux quatre angles, de petits triangles rectangles isoscèles d'hypoténuse égale à 30. Ces deux poutres sont placées de manière que la perpendiculaire commune AB à leurs axes soit verticale, le pied A le moins élevé ayant pour coordonnées (0,120,90). De plus, ces axes sont inclinés à 45° sur la ligne de terre. Enfin, AB = 60.

Représenter la poutre inférieure entaillée par l'autre.

7. Une cathédrale est constituée de la manière suivante :

1° Un parallélépipède rectangle P, dont la base ABCD a pour longueur 160 et pour largeur 60; le grand axe EF a pour azimut 125°, le Nord étant dirigé suivant Ox et l'Est suivant Oy; le sommet A le plus à l'Ouest se trouve en O. La hauteur de P est 70.

2° Un prisme droit Q, à base triangulaire isoscèle, dont la plus petite face a pour largeur 30 et repose sur la face supérieure de P, de telle manière que l'arête opposée se projette horizontalement en EF, sa cote étant, par ailleurs, 110.

3° Deux tours verticales identiques, ayant la forme de prismes droits, dont les bases sont des carrés ayant pour centres les sommets C et D le plus à l'Est et le plus au Sud et ayant leurs côtés parallèles à ceux du rectangle ABCD et de longueur 30. La hauteur de chaque tour est 110.

4° Deux flèches de forme pyramidale, de hauteur 110 et admettant pour bases les bases supérieures des deux tours.

Représenter les deux projections de la cathédrale, ainsi que son ombre propre et son ombre portée sur le plan horizontal, en la supposant éclairée par le soleil, à midi, la hauteur de ce dernier au-dessus de l'horizon étant égale à 60°.

CHAPITRE III.

CÔNES ET CYLINDRES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Un cercle a pour centre le point* (o, o'). *Son plan est déterminé par l'horizontale* $(oh, o'h')$ *et la frontale* $(of, o'f')$. *On donne son rayon* R. *Un cône a pour base ce cercle et le point* (s, s') *pour sommet.*

1° *Construire son contour apparent horizontal.*

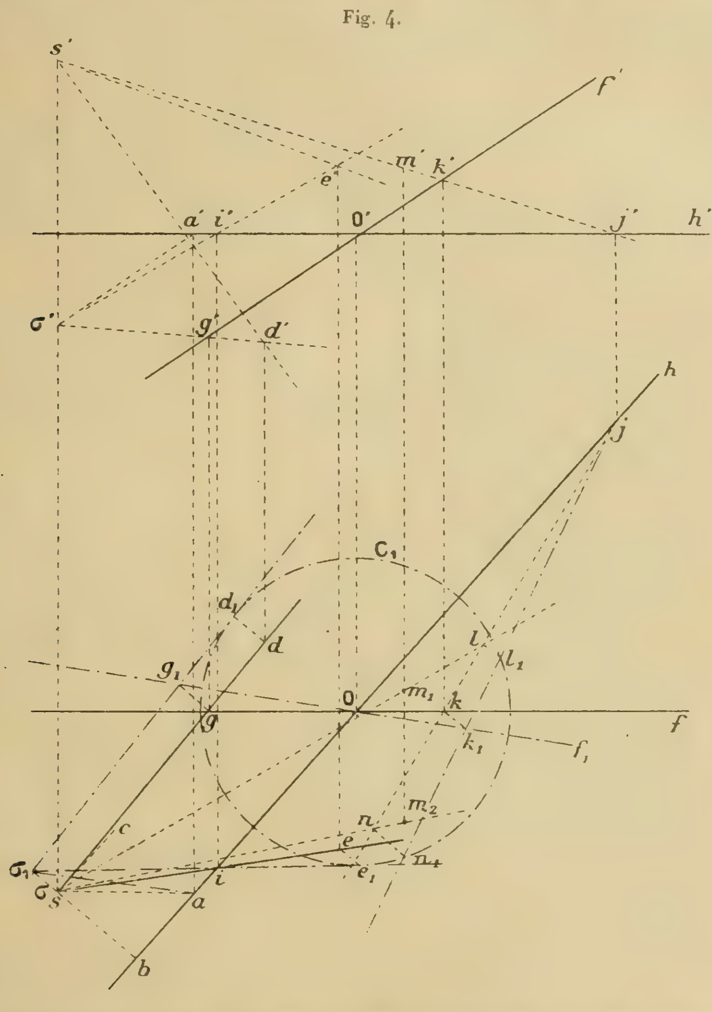
2° *Construire la projection horizontale d'un de ses points, connaissant sa projection verticale* m' (*fig.* 4).

1° Pour construire le contour apparent horizontal, nous appliquons la méthode générale du n° 23. Nous prenons la trace sur le plan de base de la verticale du sommet, en coupant par le plan de front auxiliaire sa : nous obtenons ainsi le point (σ, σ'). Il faut ensuite mener de ce point les tangentes au cercle de base. A cet effet, nous rabattons le plan de base autour de l'horizontale (h, h'). Le cercle se rabat, en vraie grandeur, suivant le cercle C_1. Le point (σ, σ') se rabat en σ_1, construit, suivant la règle classique, au moyen du triangle rectangle σbc. De σ_1, nous menons les tangentes $\sigma_1 d_1$ et $\sigma_1 e_1$ au cercle C_1. Nous relevons ces tangentes en σd et σe. (Pour la première, on a utilisé le point de rencontre g_1 avec le rabattement f_1 de f, lequel rabattement est parallèle à $a\sigma_1$. Pour la deuxième, on a utilisé le point de rencontre i avec la charnière.) En joignant sd et se, on a les projections horizontales des contours apparents demandés. Si l'on tient à avoir leurs projections verticales, il suffit de relever d en d' sur $\sigma' g'$ et e en e' sur $\sigma' i'$, puis de joindre $s'd'$ et $s'e'$.

2° Il s'agit de construire l'intersection du cône avec la droite de bout du point m'. A cet effet, nous coupons par le plan passant par cette droite de bout et par le sommet (s, s'). Ce plan coupe le plan de base suivant la droite projetée horizontalement en jk. Il faut prendre l'intersection de cette droite avec le cercle de base, ce qui se fait par

l'intermédiaire du rabattement jk_1, qui coupe C_1 aux deux points l_1, n_1, relevés en l et n. En joignant sl et sn, on obtient les projections hori-

Fig. 4.



zontales des génératrices d'intersection du cône avec le plan de bout $s'm'$. La ligne de rappel du point m' coupe ces deux projections en m_1 et m_2, qui sont les projections horizontales des deux points du cône projetés verticalement en m'.

2. *Un cône a pour sommet le point* S(—8, 19, 68) *et pour base.*

dans le plan horizontal, un cercle de rayon 27 et de centre ω(0, 63, 0). *Un disque circulaire opaque, de rayon 17, a pour centre le point* O(—24, 72, 56). *Le tout est éclairé par des rayons lumineux à 45°. Représenter le système, avec ses ombres, ainsi que les ombres portées sur les plans de projection* (*fig.* 5).

Contours apparents du cône. — Le contour apparent horizontal est constitué par les génératrices sa, sb tangentes, en projection horizontale, au cercle de base (n° 23). Le contour apparent vertical est constitué par les génératrices $s'c'$, $s'd'$, qui aboutissent aux points (c, c') et (d, d') du cercle de base où la tangente est de bout.

Ombre propre du cône. — Par le sommet S, menons la parallèle ($s\sigma$, $s'\sigma'$) aux rayons lumineux et construisons sa trace horizontale σ. Par cette trace, menons les tangentes σe et σf au cercle de base. Les génératrices d'ombre propre aboutissent aux points de contact. La génératrice (sf, $s'f'$) est vue dans les deux projections; l'autre n'est vue dans aucune et n'a pas été tracée.

Ombres portées sur les plans de projection. — Les plans tangents au cône parallèles aux rayons lumineux sont déterminés par la droite ($s\sigma$, $s'\sigma'$) et par les tangentes σe et σf. Ces dernières délimitent l'ombre portée par le cône sur le plan horizontal; mais, elles doivent être arrêtées en ε et φ sur la ligne de terre. Bien entendu, on n'a couvert de hachures que la partie de cette ombre portée qui est extérieure au contour apparent horizontal du cône.

En joignant ε et φ à la trace verticale σ'_1 de Sσ, on obtient les deux segments qui délimitent l'ombre portée sur le plan vertical.

L'ombre portée par le disque sur le plan horizontal est un cercle égal, ayant pour centre la trace horizontale p de la parallèle aux rayons lumineux menée par le point (o, o'). Une partie seulement de ce cercle, limitée par l'arc gh, est extérieure à l'ombre portée par le cône.

Le disque ne porte pas ombre sur le plan vertical.

Ombre portée par le disque sur le cône. — Cette ombre est délimitée par la courbe d'intersection du cône et du cylindre parallèle aux rayons lumineux ayant pour base le disque ou bien encore le cercle (p) du plan horizontal. Pour construire cette courbe, nous appliquons la méthode générale du n° 29. Les traces horizontales des plans auxiliaires passent par le point σ.

Avant d'aller plus loin, observons que les génératrices du cône qui aboutissent à l'arc ecf de la base doivent seules être prises en considé-



Fig. 5.

ration dans la construction de l'intersection; les autres sont, en effet, déjà dans l'ombre propre du cône et ne peuvent donner aucun point de la courbe limitant l'ombre portée par le disque.

Il y a deux plans limites : σhgf, limite pour le cône, et σin, limite pour le cylindre. Le premier donne les points (1, 1′) et (5, 5′), où la courbe est tangente aux génératrices du cylindre (n° 7). Le deuxième donne le point (3, 3′); la tangente en ce point est la génératrice du cône; elle est sensiblement confondue avec une génératrice de contour apparent vertical et l'on n'a pas tracé sa projection verticale.

Pour avoir des points dans les régions insuffisamment guidées de la courbe, on a coupé par le plan auxiliaire $\sigma kjql$, qui passe par le centre de similitude interne q des deux bases. Les génératrices du cône et du cylindre, aboutissant respectivement aux points homologues l et k, donnent le point (4, 4′), où la tangente est horizontale et parallèle à la tangente lm au cercle de base du cône. Le point 4′ est le point le plus haut de la projection verticale (n° 32).

Le même plan auxiliaire nous donne le point (2, 2′), sur la génératrice du cylindre issue du point j. Ce point peut être considéré comme un point courant. La tangente ($2t$, $2't'$) est obtenue par l'intersection des plans tangents, dont les traces horizontales sont les tangentes lm et jr aux bases. Ces traces ne se rencontrant pas dans les limites de l'épure, on a utilisé le plan auxiliaire σf, dont la trace horizontale rencontre les traces des plans tangents en m et r. En joignant sm, menant par r la parallèle aux génératrices du cylindre et prenant l'intersection de ces deux droites, on obtient un point t de la tangente cherchée, qui se rappelle en t', sur $r't'$.

Pour augmenter la précision du tracé, on a encore coupé par deux autres plans auxiliaires, qui ont donné les quatre points marqués sans numéro. Les constructions n'ont pas été reproduites, afin de ne pas embrouiller l'épure.

Pour opérer la jonction, on a suivi la marche indiquée au n° 31. Partant des points f et g sur les deux bases et, par conséquent, du point 1 sur la courbe, on marche dans le sens des aiguilles d'une montre sur chaque base. On rencontre les points l, j, qui donnent le point (2, 2′), puis les points n, i, qui donnent (3, 3′). On est alors arrivé à un plan limite et l'on doit rebrousser chemin sur la base du cône; on rencontre les points l, k, qui donnent (4, 4′) et enfin les points f, h, qui donnent (5, 5′).

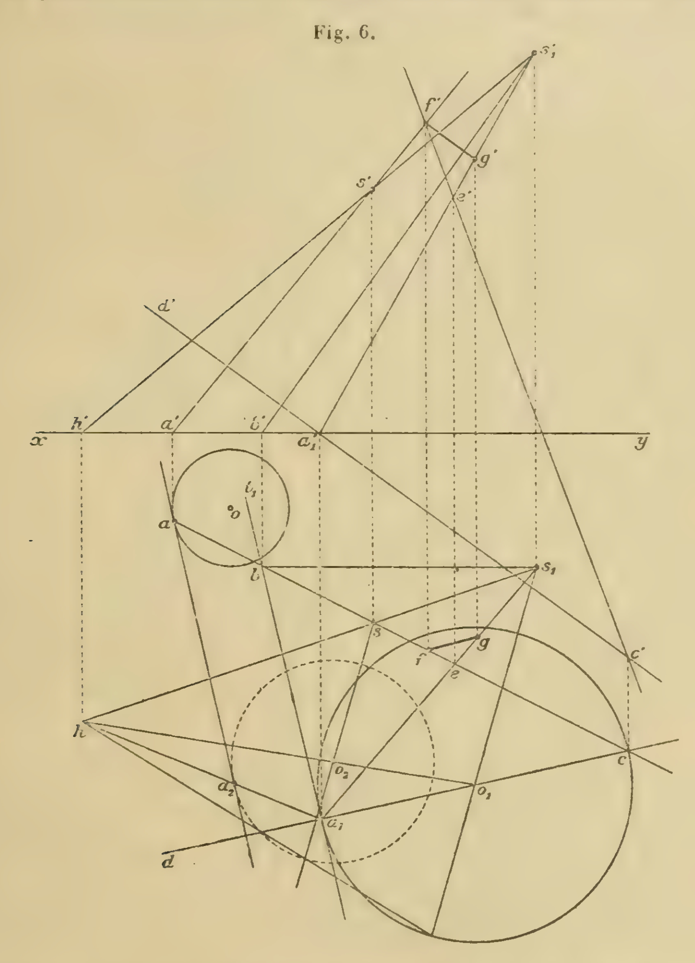
La ponctuation et le tracé des hachures ne donnent lieu à aucune difficulté.

3. *On donne deux cônes, ayant pour sommets respectifs* S *et* S_1 *et*

pour bases des cercles du plan horizontal, de centres respectifs o et o_1. Construire une de leurs normales communes (*fig*. 6).

Appliquons la méthode du n° 24. Il faut d'abord mener aux deux cônes des plans tangents parallèles. A cet effet, nous transportons le cône S_1 parallèlement à lui-même, en amenant son sommet en S. Pour

Fig. 6.



construire sa nouvelle base, nous remarquons que les deux positions du cône peuvent être considérées comme homothétiques par rapport à la trace horizontale h de la droite SS_1; d'où il résulte que la nouvelle base est homothétique de l'ancienne par rapport à ce point, le rapport d'ho-

mothétie étant $\frac{hs}{hs_1}$. Le nouveau centre o_2 est à l'intersection de ho_1 et de la parallèle à s_1o_1 menée par s. Pour avoir le nouveau rayon, on a construit l'homologue d'un des points de rencontre de s_1o_1 avec l'ancienne base.

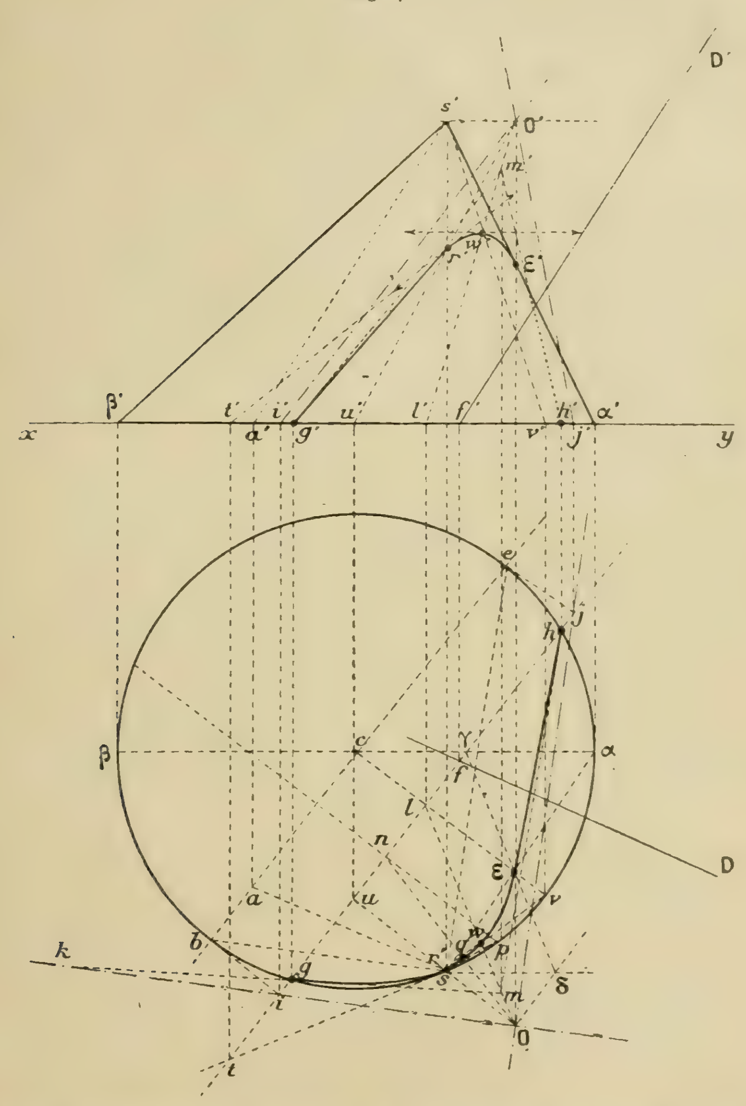
Le cercle o_2 étant tracé, menons une tangente commune aa_2 aux cercles o et o_2; puis, prenons l'homologue a_1 du point de contact a_2 et menons la tangente a_1t_1 en ce point. Les plans $\mathrm{S}aa_2$ et $\mathrm{S}_1a_1t_1$ sont deux plans tangents parallèles. Il ne reste plus qu'à mener la perpendiculaire commune aux deux génératrices de contact $\mathrm{S}a$ et S_1a_1. La direction de cette perpendiculaire commune est d'ailleurs la perpendiculaire au plan tangent $\mathrm{S}_1a_1t_1$, par exemple. Menons cette perpendiculaire par un point de S_1a_1, par exemple par a_1. Sa projection horizontale est perpendiculaire à l'horizontale a_1t_1; c'est le rayon o_1a_1d. Pour avoir la projection verticale, nous déterminons une frontale (s_1b, s'_1b') du plan tangent et nous menons a'_1d' perpendiculaire à s'_1b'. Nous prenons ensuite l'intersection du plan $\mathrm{S_1A_1D}$ avec la génératrice SA, en coupant par le plan projetant horizontalement cette droite. Nous obtenons ainsi le point (f, f'), qui est le pied de la normale commune sur le cône S. Menant par ce point la parallèle à (d, d'), nous avons la normale elle-même et son point de rencontre (g, g') avec $(s_1a_1, s'_1a'_1)$ est le pied sur le deuxième cône.

4. *Un cône a pour base un cercle* (C) *dans le plan horizontal. Son sommet* S *a sa projection horizontale* s *sur ce cercle. On donne, d'autre part, une droite* (D, D') *et l'on demande de mener, par cette droite, un plan coupant le cône suivant une courbe projetée horizontalement suivant une hyperbole équilatère. Construire les deux projections de cette courbe, en limitant le cône à son sommet et à sa base* (*fig.* 7).

Si l'on mène, par le sommet S, un plan Q parallèle au plan P cherché, ce plan doit couper le cône suivant deux génératrices projetées horizontalement suivant deux droites rectangulaires, puisque ces deux droites sont les directions asymptotiques de la projection horizontale de la section par le plan P (n° 26). Pour avoir ces deux génératrices, on doit prendre l'intersection de la base avec la trace horizontale de Q et joindre les deux points obtenus b, e, au sommet S. Les deux droites sb et se doivent être rectangulaires; comme s est sur le cercle (C), la droite be doit être un diamètre de ce cercle. D'autre part, elle doit évidemment passer par la trace horizontale a de la parallèle à (D, D') menée par S. C'est donc la droite ae. Si nous menons maintenant la parallèle à cette

droite par la trace horizontale f de (D, D′), nous obtenons la trace horizontale du plan P, qui est, dès lors, déterminé.

Fig. 7.



Il s'agit maintenant de construire la section du cône par ce plan. Commençons par chercher ses asymptotes. Ce sont les intersections du

plan P avec les plans tangents au cône le long des génératrices Sb, Se. Les traces horizontales de ces plans tangents sont les tangentes en b et e au cercle (C); elles rencontrent la trace horizontale de (P) aux deux points i et j. En menant, par ces points, les parallèles io à bs et jo à es, on a les asymptotes de la projection horizontale. Le point o en est le centre. Remarquons, d'ailleurs, que le centre O de la section dans l'espace se trouve sur le diamètre conjugué du plan Q. Or, ce diamètre passe par le pôle de be par rapport au cercle (C) (t. II, n° 434). Mais, ce pôle est à l'infini dans la direction perpendiculaire à be. Il suit de là que le diamètre SO est une horizontale perpendiculaire à be. Il est aisé de vérifier, par la Géométrie élémentaire, que so est effectivement perpendiculaire à be, en remarquant simplement que le triangle oij se déduit du triangle sbe par la translation bi. Nous avons maintenant la projection verticale o' du centre, en menant une ligne de rappel jusqu'à la parallèle à la ligne de terre menée par s'. En joignant $o'i'$ et $o'j'$, on a les asymptotes de la projection verticale. (Comme vérification, elles doivent être parallèles aux projections verticales des génératrices Sb, Se, projections non construites sur la figure.)

Nous avons immédiatement deux points de la section en g, h, à la rencontre du cercle (C) avec la trace horizontale de (P). Ces points se rappellent en g', h', sur la ligne de terre. Nous avons construit la tangente en g, en utilisant les asymptotes (*cf.* t. II, n° 541; $gk = go$). En prenant l'intersection de cette tangente avec le diamètre ol conjugué de gh, nous avons le pôle m de gh. En joignant mh, nous avons la tangente en h. Le point m se rappelle verticalement, en m', sur $o'l'$; $m'g'$ et $m'h'$ sont les tangentes, en g' et h', à la projection verticale.

On a maintenant plus d'éléments qu'il n'en faut pour construire, par points, les deux projections (n° 141). Indiquons toutefois la construction de quelques autres points remarquables.

Cherchons le sommet de la projection horizontale. L'axe est la bissectrice de l'angle ioj. Il faut prendre l'intersection du cône avec la droite du plan (P) projetée horizontalement suivant cette bissectrice. Cette droite a pour trace horizontale le point n, situé sur ij; elle passe, d'autre part, par le point (o, o'); celà suffit à la déterminer. Nous coupons maintenant le cône par le plan contenant cette droite et le sommet S et nous cherchons la trace horizontale de ce plan. Cette trace passe d'abord par le point n; en outre, elle est parallèle à so, qui est une horizontale du plan; nous pouvons donc la tracer. Elle rencontre le cercle en deux points, dont un seul, p, donne une génératrice rencontrant on, en q, sur la nappe intéressante du cône. Ce point q est le sommet de la branche d'hyperbole que nous avons à construire.

Cherchons maintenant le point le plus haut de la projection verticale. Il se trouve d'abord sur le diamètre conjugué $o'l'$ des cordes horizontales. En outre, le plan tangent en ce point au cône doit avoir une trace horizontale parallèle à gh; comme cette trace doit être tangente au cercle, son point de contact doit être sur le diamètre cl perpendiculaire à gh; l'extrémité v de ce diamètre seule convient; elle se rappelle en v' sur xy. En joignant $s'v'$ et prenant son intersection avec $o'l'$, on a le point w' cherché. En projection horizontale, sv rencontre, de même, ol en w, où la tangente est parallèle à gh.

Le point s appartient évidemment à la projection horizontale de l'hyperbole, le point correspondant de l'espace étant l'intersection du plan (P) avec la génératrice verticale du cône. La projection verticale r' de ce point a été obtenue en coupant (P) par le plan vertical de trace so; l'intersection passe par le point (u, u'), qui est sa trace horizontale et par le point (o, o'). La droite $o'u'$ coupe ss' au point r'. La tangente en s est la tangente st au cercle, car le plan tangent au cône en R est vertical. En prenant son intersection t avec gh et rappelant, en t', sur xy, on a la tangente $t'r'$ en r'.

Cherchons enfin le point sur le contour apparent vertical. Coupons le plan (P) par le plan S$\alpha\beta$. La trace horizontale de l'intersection est le point γ où $\alpha\beta$ rencontre gh. En utilisant, de même, le plan horizontal auxiliaire $s'o'$, on obtient le point δ ($s\delta$ parallèle à $\alpha\beta$ et $o\delta$ parallèle à gh). La droite $\gamma\delta$ rencontre $s\alpha$ au point ε, qui se rappelle verticalement au point ε' cherché, sur $s'\alpha'$.

Les points et tangentes obtenus dans les deux projections suffisent amplement pour construire les deux branches d'hyperboles.

En projection horizontale, tout est vu. En projection verticale, le point h' est caché; il en est donc de même de l'arc $h'\varepsilon'$, l'arc $\varepsilon'g'$ étant, au contraire, vu.

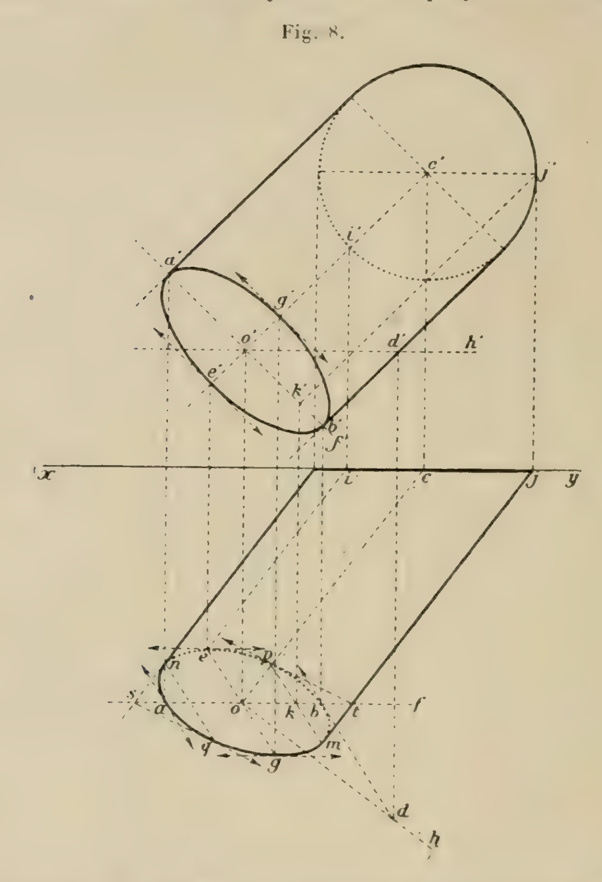
3. *Un cylindre a pour base un cercle* (C) *dans le plan vertical. Construire une de ses sections droites et le représenter, en le limitant à cette section et à sa base* (*fig.* 8).

Prenons le point (o,o') sur l'axe du cylindre et menons, par ce point, un plan (P) perpendiculaire aux génératrices, au moyen de l'horizontale (h,h') et de la frontale (f,f'). C'est ce plan que nous prenons comme plan de section droite.

Le plan de bout passant par l'axe du cylindre est évidemment un plan de symétrie; il en résulte que son intersection avec le plan (P) est un axe de la section droite. Le deuxième axe est perpendiculaire au premier;

c'est donc la frontale (f, f'). Ces deux axes se projettent verticalement suivant les axes de la projection verticale de la section, car ils demeurent à la fois diamètres conjugués et rectangulaires. (On peut aussi remarquer que la droite $c'o'$ est un axe de symétrie de la projection verticale.)

Fig. 8.



Les extrémités de l'axe de front ne sont autres que les points (a, a') et (b, b') situés sur le contour apparent vertical. La tangente en b à la projection horizontale est la projection horizontale bd de l'intersection du plan (P) avec le plan tangent de bout, de trace verticale $b'd'$.

Pour avoir les extrémités de l'autre axe, coupons par le plan de bout qui le contient. Dans le plan (P), nous obtenons une droite qui passe par O et qui est parallèle à la tangente $(bd, b'd')$. Elle rencontre, par exemple, la génératrice issue du point (i, i') au point (e, e'), qui est un des sommets cherchés; l'autre sommet (g, g') s'en déduit par symétrie.

En projection horizontale, ab et eg sont deux diamètres conjugués. On pourrait en déduire les axes par la construction classique (n° 142). Mais, cela n'a pas d'utilité pratique.

Cherchons les points sur le contour apparent horizontal. On obtient le point m, en coupant par le plan projetant verticalement la génératrice issue du point (j, j'); l'intersection avec le plan (P) est une droite dont la projection horizontale km est parallèle à bd et rencontre la projection horizontale de la génératrice au point m. Par symétrie par rapport à o, on obtient n.

En portant $\overline{kp} = -\overline{km}$, on obtient un autre point de la projection horizontale, la tangente en ce point étant pt, puisque ok est diamètre conjugué de mk. De même, on déduit q de n, avec la tangente qs.

Nous avons maintenant assez de points et de tangentes pour tracer la projection horizontale. Quant à la projection verticale, elle a été tracée par le procédé de la bande de papier.

La ponctuation ne présente aucune difficulté; la demi-ellipse men est seule cachée, en projection horizontale; on le voit, par exemple, en coupant mentalement le cylindre par la verticale du point e; on trouve un point d'intersection au-dessus du point (e, e').

6. *Un cylindre* (C) *a pour base un cercle dans le plan vertical; ses génératrices sont horizontales. Un deuxième cylindre* (C_1) *a pour base un cercle dans le plan horizontal; ses génératrices sont de front. Représenter le second cylindre entaillé par le premier* (*fig.* 9).

Les plans auxiliaires sont parallèles aux génératrices des deux cylindres; leurs traces horizontales sont donc parallèles aux projections horizontales des génératrices de (C) et leurs traces verticales sont parallèles aux projections verticales des génératrices de (C_1).

Plans limites. — Il y a deux plans limites : $a'\alpha a_1 a_2$ et $b'\beta b_1 b_2$. Ils sont tous deux limites pour (C); on peut donc prévoir qu'il y aura pénétration de (C) dans (C_1). Les génératrices issues des points a' et a_1, par exemple, se rencontrent en un point projeté verticalement en $5'$ et rappelé horizontalement en 5 sur la projection horizontale de la génératrice de (C_1). D'après le théorème des surfaces limites, la tangente en ce point est la génératrice de (C_1). On a de même les points $(13, 13')$, $(1, 1')$, $(9, 9')$.

Points sur les contours apparents. — Le contour apparent horizontal de (C) est constitué par les génératrices issues des points i' et h', où la tangente à la base est verticale. Les plans auxiliaires $i'\eta g_1 g_2$ et $h'\varphi f_1 f_2$

donnent les points (6, 6′), (14, 14′) et (2, 2′), (10, 10′), obtenus chacun en projection horizontale, puis rappelés verticalement sur $i'h'$.

On construit, d'une manière analogue, au moyen des plans auxiliaires $d_1\delta e'd'$ et $e_1\varepsilon g'f'$, les points (7, 7′), (3, 3′) et (11, 11′), (15, 15′) du contour apparent horizontal de (C_1) et, au moyen des plans auxiliaires $j'\psi h_1 h_2$ et $k'\theta i_1 i_2$, les points (4, 4′), (12, 12′) et (8, 8′), (16, 16′) du contour apparent vertical de (C). Quant aux génératrices de contour apparent vertical de (C_1), elles sont en dehors de l'intervalle des plans limites et ne rencontrent pas la courbe.

Considérons, par exemple, le point (15, 15′). Sa projection horizontale seule nous intéresse, en tant que point remarquable. Toutefois, nous avons construit sa projection verticale, afin d'avoir un point de plus dans cette projection. La tangente au point 15 est la génératrice $e_1 15$ de contour apparent horizontal (n° 2). La tangente au point 15′ s'obtient en considérant ce point comme un point courant, c'est-à-dire en prenant l'intersection des plans tangents. Or, le plan tangent à (C_1) est de front; la tangente en 15′ est donc parallèle à la trace verticale du plan tangent à (C), c'est-à-dire à la tangente en g' à la base. On a, de même, construit les tangentes aux points 11′, 3′, 7′ et aux points 4, 12, 8, 16 ; mais, elles n'ont pas été reproduites sur la figure.

Jonction des points. — On a maintenant suffisamment de points pour tracer la courbe. Pour effectuer leur jonction, partons de b' et de b_1, c'est-à-dire du point (1, 1′). Parcourons, par exemple, la base de (C) dans le sens des aiguilles d'une montre et nécessairement aussi la base de (C_1), puisque le sens inverse nous est interdit par le plan limite. Nous rencontrons successivement les points 2, 3, 4, 5. Arrivés au point 5, nous sommes en a_1 sur la base de (C_1) et nous rencontrons un plan limite; il nous faut rebrousser chemin sur cette base, en continuant, au contraire, à parcourir (C) dans le même sens. Nous rencontrons alors les points 6, 7, 8 et revenons au point 1 ; nous venons d'obtenir une première courbe fermée. Mais, il nous reste encore des points.

Partons alors du point (9, 9′), c'est-à-dire de b' et de b_2. Tournons toujours dans le même sens sur (C) et nécessairement dans le sens inverse sur (C_1). Nous rencontrons 10, 11, 12, 13 ; puis, nous rebroussons chemin sur (C_1) ; nous rencontrons 14, 15, 16 et revenons au point 9, en fermant une deuxième courbe.

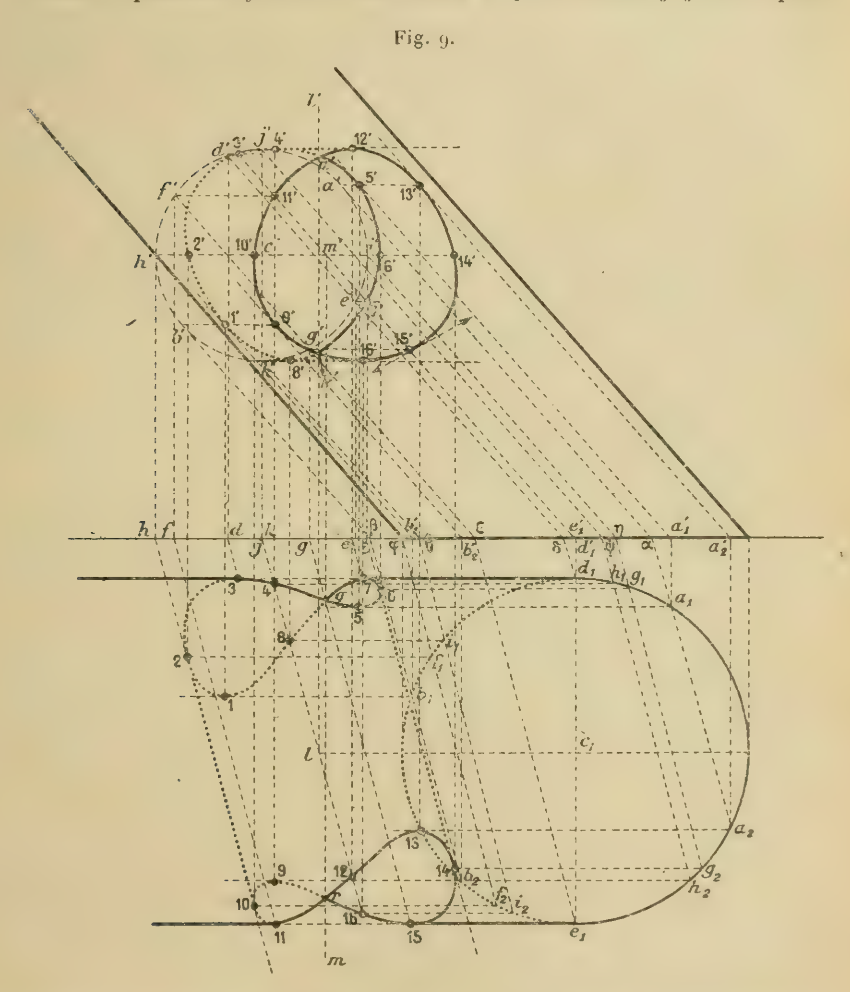
Nous avons maintenant épuisé tous les points et nous avons tracé l'intersection complète. On voit bien qu'*il y a pénétration*, ainsi que nous l'avions prévu.

Lignes des points doubles apparents. — L'épure montre qu'il y a deux

points doubles apparents dans chaque projection (n° 8). En projection verticale, ils doivent se trouver sur la projection verticale de l'intersection des plan diamétraux conjugués des cordes de bout, c'est-à-dire des plans contenant les contours apparents verticaux.

Pour le premier cylindre, nous avons le plan vertical $j'j$ 16 et, pour

Fig. 9.



le second, nous avons le plan de front $c_1 l$. Ces deux plans se coupent suivant la verticale (l, l'). Les points doubles apparents n', p' se trouvent sur l'. On construit, d'une manière analogue, la ligne des points doubles en projection horizontale, qui est la droite de bout m.

Ponctuation. — Appliquons les règles du n° 11. II.

Nous commençons par ponctuer la courbe sur (C_1). En projection horizontale, le point 5, par exemple, est sur la génératrice vue $a_1 5$; donc, il est vu, ainsi que tout l'arc 3-4-5-6-7. L'arc 7-8-1-2-3 est, au contraire, caché. Toutefois, la portion $q7$ de cet arc redevient vue quand on enlève la portion de (C_1) intérieure à (C), car on supprime ainsi tous les points de (C_1) qui étaient situés au-dessus de $q7$. De même, l'arc 11-12-13-14-15 est vu et l'arc 15-16-9-10-11 est caché, sauf r16-15, qui devient vu pour la même raison que $q7$.

En projection verticale, toute la boucle qui contient $9'$ est vue. L'autre boucle est, au contraire, cachée; toutefois, l'arc $n'5'p'$ devient vu quand on enlève (C).

Les segments 3-7 et 11-15 du contour apparent horizontal de (C_1) sont enlevés, comme intérieurs à (C). Les segments 2-10, 6-14 du contour apparent horizontal et $4'$-$12'$, $8'$-$16'$ du contour apparent vertical de (C) sont seuls conservés, comme intérieurs à (C_1) ; ils sont, bien entendu, cachés.

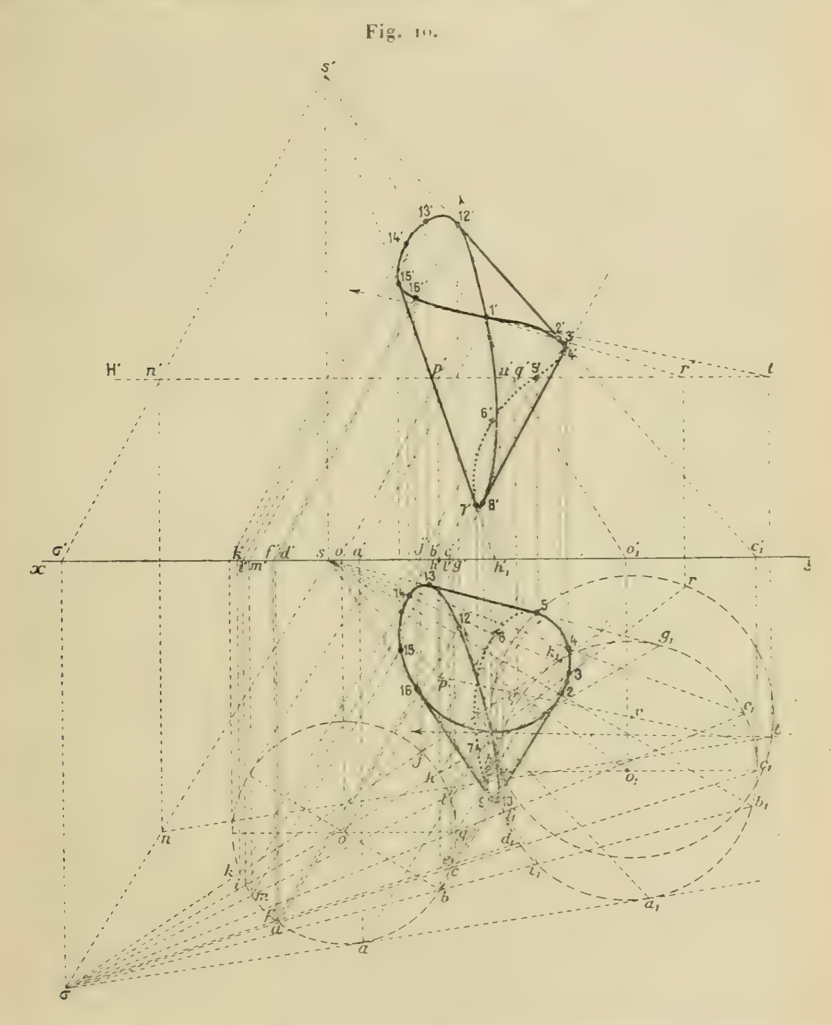
7. *Un cylindre C a pour base le cercle* (O) *du plan horizontal. Un cône, de sommet* (s, s'), *a pour base le cercle* (O_1) *du plan horizontal. Construire le solide commun* (*fig.* 10).

Par le sommet du cône, menons la parallèle aux génératrices du cylindre et prenons sa trace horizontale σ. Les traces horizontales des plans auxiliaires passent toutes par ce point.

Plans limites. — On obtient leurs traces en menant, du point σ, les tangentes aux deux bases. L'une de ces tangentes $\sigma a a_1$ est commune aux deux cercles. Le plan correspondant est donc tangent à la fois aux deux cônes et le point $(1, 1')$ est un *point double* de l'intersection. Pour avoir les tangentes en ce point, on a appliqué la méthode du cône d'erreur (n° 6). Pour que la construction se fasse dans les limites de l'épure, on a cherché la base de ce cône dans le plan horizontal H'. Ce plan coupe le cylindre et le cône proposés suivant deux cercles, de centres respectifs (p, p') et (q, q'), sur les diamètres conjugués des plans horizontaux par rapport aux deux surfaces. La base du cône d'erreur est une conique passant par les quatre points de rencontre de ces deux cercles. C'est donc un cercle appartenant à leur faisceau et ayant, par conséquent, son centre sur la droite pq. Pour déterminer ce centre, il suffit de construire deux points du cercle. Or, on a mené le plan H' par un point $(5, 5')$ ultérieurement construit de l'intersection ; le point 5 est donc déjà un point du cercle. On en a construit un second, en joignant $(1, 1')$ à un autre

point (3, 3′) de l'intersection et en prenant la trace (r, r') de la droite obtenue sur H′. La perpendiculaire au milieu de $5r$ coupe pq au centre c cherché. La base du cône d'erreur est, dès lors, le cercle de centre c et

Fig. 10.



de rayon cr. D'autre part, le plan H′ coupe le plan tangent commun suivant la droite (nut, $n'u't'$), qui rencontre le cercle précédent aux points (t, t') et (u, u'). Il ne reste plus qu'à joindre ces points au point (1, 1′) pour avoir les tangentes au point double.

Le deuxième plan limite a pour trace horizontale σkjk_1. Il est limite

pour le cône et donne les deux points (6, 6′) et (14, 14′); les tangentes en ces points sont les génératrices ($j6$, $j'6'$) et ($k14$, $k'14'$) du cylindre, en vertu du théorème des surfaces limites (n° 7).

Points sur les contours apparents. — Sur le contour apparent horizontal du cylindre, on a les points 2 et 10 fournis par le plan auxiliaire $\sigma bi_1 b_1$. (On n'a rappelé verticalement que le point 2, en 2′, sur la projection verticale $b'2'$ de la génératrice du cylindre.) Sur le contour apparent horizontal du cône, on a les points 9, 16, 5, 13, fournis par les plans auxiliaires σfed_1 et σihg_1 et qui ont tous été, sauf le point 9, rappelés verticalement sur les génératrices du cylindre. Sur le contour apparent vertical du cylindre, on a les points 8′ et 4′, fournis par le plan auxiliaire $\sigma gf_1 e_1$ et dont on a construit d'abord les projections horizontales 8 et 4. Enfin, sur le contour apparent vertical du cône, on a les points 3′, 12′, 7′, 15′, fournis par les plans auxiliaires σdcc_1 et σmlh_1 [1]; on les a rappelés horizontalement sur les génératrices du cylindre.

Jonction des points. — Les points précédemment obtenus sont suffisamment nombreux pour qu'on puisse facilement en opérer la jonction.

Partons du point double (1, 1′), c'est-à-dire des points a et a_1 sur les bases; et décrivons celles-ci dans le sens trigonométrique. Nous rencontrons successivement les points b et b_1, qui donnent (2, 2′), puis c et c_1, qui donnent (3, 3′), puis g et e_1, qui donnent (4, 4′), puis h et g_1, qui donnent (5, 5′), puis j et k_1, qui donnent (6, 6′). Nous sommes arrivés dans un plan limite pour le cône et nous devons rebrousser chemin sur la base du cylindre, tout en continuant à tourner dans le même sens sur le cône. Nous rencontrons alors l et h_1, qui donnent (7, 7′), puis g et f_1, qui donnent (8, 8′), puis e et d_1, qui donnent (9, 9′) [2], puis b et i_1, qui donnent (10, 10′), puis a et a_1, qui nous ramènent au point double, avec le n° 11. Nous pouvons continuer à tourner dans le même sens sur les deux bases et nous rencontrons successivement d et c_1, qui nous donnent (12, 12′), puis i et g_1, qui nous donnent (13, 13′), puis k et k_1, qui nous donnent (14, 14′); nous rebroussons chemin sur le cylindre seulement et rencontrons m et h_1, qui nous donnent (15, 15′), puis f et d_1, qui donnent (16, 16′) et enfin a et a_1, qui nous ramènent au point de départ, avec le même sens de parcours sur les deux bases. Nous avons maintenant rencontré tous les points et terminé leur jonction.

Ponctuation. — Appliquons les règles du n° 11, III. En projection

---

(1) Les lignes de rappel des points c et l sont pratiquement confondues.

(2) Les points 9 et 10′ n'ont pas été marqués sur la figure qui eût été trop confuse.

horizontale, l'arc 5-6-7-8-9 et, en projection verticale, l'arc 4'-5'-6'-7' sont seuls cachés à la fois sur les deux surfaces. Des contours apparents, il ne reste que les segments 2-10, 5-13, 9-16, en projection horizontale et les segments 4'-8', 2'-12', 7'-15', en projection verticale.

8. *On donne un cercle* (O) *dans le plan horizontal. On mène les deux tangentes σa parallèle à la ligne de terre et σb inclinée à* 45° *sur cette ligne. Puis, on mène bc et bd respectivement parallèle et perpendiculaire à xy. On considère l'ellipse tangente en b au cercle, passant par c et d et tangente à σa. Un cône a pour base ce cercle et son sommet* S *se projette horizontalement à l'intersection de σo et de ac. Un deuxième cône a pour base l'ellipse; son sommet se trouve sur la droite* ($s\sigma$, $s'\sigma'$), s_1 *se trouvant en même temps sur la parallèle à ac menée par b. Représenter l'ensemble des deux cônes* (*fig.* 11).

Construction de l'ellipse. — Cherchons d'abord le point de contact avec σa. A cet effet, appliquons le théorème de Desargues (t. II, n° 505) au faisceau déterminé par le cercle et l'ellipse et à la droite σa. Le point de contact a du cercle est un point double de l'involution ; le point e et le point à l'infini sur bc sont, d'autre part, deux points homologues, comme appartenant à la conique dégénérée bd, bc. Il suit de là que le point de contact de l'ellipse, qui est le deuxième point double et qui, par conséquent, doit être conjugué harmonique de a par rapport à tout couple de points homologues, est le point f symétrique de a par rapport à e.

Un axe de l'ellipse est la droite bo, car elle est évidemment le diamètre conjugué des cordes parallèles à cd, lesquelles cordes sont perpendiculaires à bo. La droite fi est, d'autre part, le diamètre conjugué des cordes parallèles à bc ; elle rencontre donc bo au centre o_1 de l'ellipse. On en déduit le deuxième sommet h de l'axe bo, en prenant le symétrique de b par rapport à o_1. (On peut remarquer que h se trouve, en vertu de cette construction même, sur la droite ce, qui est parallèle à if et lui est homothétique, par rapport à b et dans le rapport 2.)

Pour construire le grand axe, on peut mener $o_1\theta$ perpendiculaire et $f\varphi$ parallèle à bo_1 ; si l'on observe que $f\varphi$ est la polaire de θ, on voit que $o_1\alpha$ est moyen proportionnel entre $o_1\theta$ et $o_1\varphi$ [1].

Construction de l'intersection. — La trace de la ligne des sommets

---

[1] On peut remarquer aussi que θ appartient au cercle de Monge (t. II, n° 530) : donc. $\overline{o_1\alpha}^2 = \overline{o_1\theta}^2 - \overline{o_1 b}^2$, ce qui se construit par un triangle rectangle.

sur le plan des deux bases est le point σ. Par ce point, passent deux tangentes communes : σb et σfa ; il en résulte que les deux cônes sont bitangents et, par suite, leur intersection se décompose en deux coniques (n° 35). Ces deux coniques se rencontrent aux deux points de contact. L'un de ces points est b ; l'autre est le point à l'infini sur (sa, $s'a'$), car la droite bf est parallèle à ca et, par suite, coïncide avec $s_1 f$. L'une des coniques passe par d et l'autre par c. Le plan de la première a pour trace horizontale bd ; c'est donc un plan de bout ; sa trace verticale est la parallèle à $s'a'$ menée par b'. Si l'on mène le plan parallèle par (s, s'), on obtient un plan de trace horizontale am ; les directions asymptotiques de la première conique sont donc sa et sm, en projection horizontale. Il s'ensuit que cette conique est une *hyperbole*. On obtient ses asymptotes ep et np, en prenant les intersections de son plan avec les plans tangents le long de sa et de sm. Cherchons les points de cette hyperbole où la tangente est perpendiculaire à xy. Dans l'espace, les tangentes en ces points doivent être de bout, puisque le plan de l'hyperbole est un plan de bout. Il en résulte que chacun de ces points doit appartenir à la fois aux contours apparents verticaux des deux cônes. Effectivement, les génératrices ($s_1 g$, $s'_1 g'$) et (sj, $s'j'$), par exemple, se rencontrent, car il est facile de prouver que la droite gj passe par σ. $\Big($On peut montrer, par exemple, que les rapports $\frac{kj}{l\sigma}$ et $\frac{gk}{gl}$ sont tous deux égaux à $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.$\Big)$ Leur point de rencontre (1, 1′) est le seul qui nous intéresse, car l'autre appartient aux nappes supérieures des deux cônes. (Comme vérification, le point 1 doit se trouver sur le diamètre pq conjugué des cordes parallèles à bd.)

Cherchons les tangentes en b et d. Pour avoir la tangente en b, prenons l'intersection du plan $bb'1'$ avec le plan tangent ($sb\sigma$, $s'b'\sigma'$). A cet effet, coupons par le plan horizontal qui passe par le point de (sb, $s'b'$) projeté horizontalement en k. Ce plan coupe le plan tangent suivant une droite projetée horizontalement en ka, parallèle à $b\sigma$. Il coupe le plan $bb'1'$ suivant une droite de bout projetée horizontalement en ia. (En effet, le point de sb projeté en k a même cote que le point de sa projeté en c, lequel a même cote que le point de ep projeté en i.) Ces deux droites se rencontrent au point a ; donc, ab est la tangente en b. (On peut aussi démontrer que la direction ab est conjuguée harmonique de pb par rapport à pe, pn ou que les directions parallèles sG [1], si, sa, sm

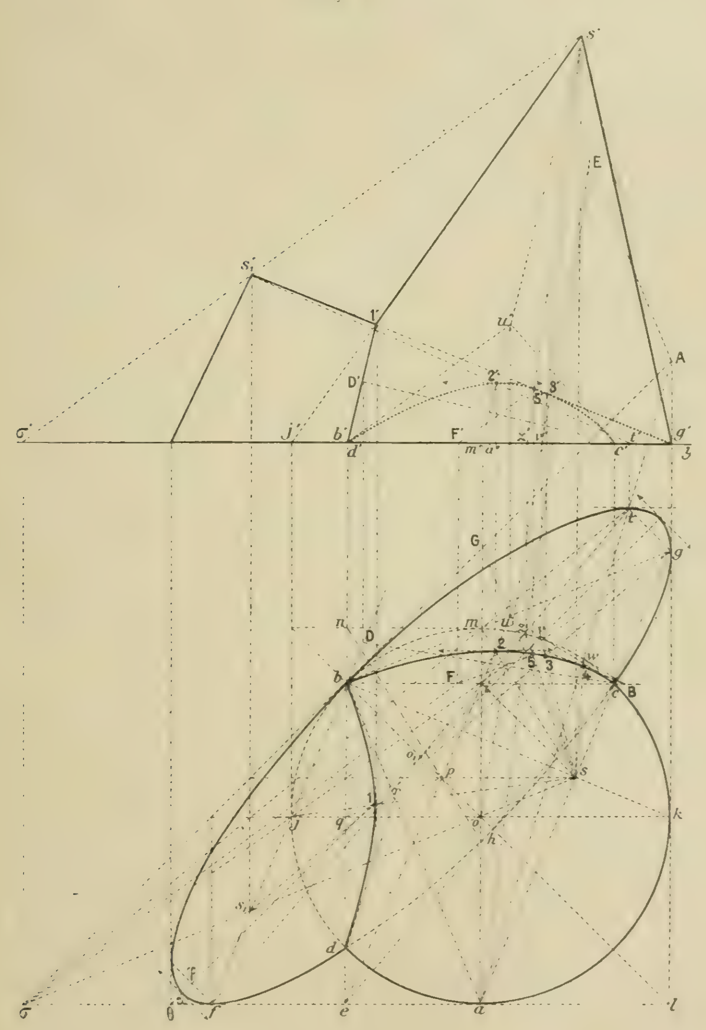
---

[1] ab et sG sont parallèles, parce que ce sont les polaires respectives du point σ et du point de rencontre de bc avec σo.

forment un faisceau harmonique ; or, cela résulte de ce que G est le pôle de *bc* par rapport au cercle.)

Le point de rencontre *r* de *ba* et de *pq* est le pôle de *bd* par rapport à l'hyperbole ; donc, *rd* est la tangente en *d*.

Fig. 11.



Il est maintenant aisé de tracer l'arc d'hyperbole *b* 1 *d*, qui se projette verticalement suivant le segment *b'* 1'.

Passons à la deuxième conique. Son plan a pour trace horizontale bc; il est donc parallèle au plan tangent ($sa\sigma$, $s'a'\sigma'$) et, par suite, la conique est une *parabole*, de direction asymptotique (sa, $s'a'$).

Cherchons le point à tangente horizontale. Dans l'espace, cette tangente doit être parallèle à la ligne de terre, puisque le plan de la parabole est parallèle à cette ligne. Nous devons donc mener aux cônes les plans tangents parallèles à xy. Il y a d'abord le plan tangent commun $sa\sigma$, qui donne le point à l'infini et, par conséquent, ne convient pas. Nous avons ensuite les plans tangents le long de sm et de s_1t. Ces deux génératrices se rencontrent au point cherché (2, 2'). (On peut vérifier, par des considérations élémentaires, que les points m et t sont bien en ligne droite avec σ. On peut vérifier aussi que le point 2 se trouve sur le diamètre conjugué ei des cordes parallèles à bc.)

En prenant le point u, symétrique de i par rapport à 2, on a le pôle de bc, qui se rappelle en u' sur $s'a'$. En joignant ub, uc; $u'b'$, $u'c'$, on a les tangentes en b, c, b', c'. [On peut vérifier que bu passe par m, en coupant, par exemple, le plan tangent $sb\sigma$ et le plan sécant par le plan auxiliaire $s\sigma m$; on obtient, d'une part, la droite $s\sigma$, d'autre part, une parallèle à $s\sigma$; il en résulte que la tangente en b est parallèle à $s\sigma$; or, bm jouit précisément de cette propriété. On peut aussi se rappeler (n° 30) que les tangentes au point double b sont conjuguées harmoniques par rapport aux génératrices bs et bs_1; or, bs et bs_1 ont pour bissectrice la première tangente ba; la deuxième tangente est donc la deuxième bissectrice bm.]

On a maintenant suffisamment d'éléments pour tracer l'arc de parabole ($b2c$, $b'2'c'$). Toutefois, à titre d'exercice, cherchons les sommets des deux projections.

En projection horizontale, la tangente au sommet est perpendiculaire à sa, donc parallèle à bsk. Nous devons mener le plan tangent au premier cône, par exemple, autre que $sa\sigma$, parallèle à la droite du plan sécant projetée horizontalement suivant bk. A cet effet, il faut mener une parallèle à cette droite par le sommet du cône et prendre sa trace horizontale. Cette trace T doit appartenir à σa; c'est donc le point de rencontre de bsk et de σa. De ce point, on doit ensuite mener les tangentes à la base du cône; un premier point de contact est a; le deuxième peut être construit au moyen de la polaire de T; or, cette polaire passe par le pôle A de bk; en joignant aA, on a, en α, le point de contact cherché. La tangente en ce point rencontre bc en B, qui appartient à la tangente au sommet; cette tangente est donc la parallèle à bk menée par B; elle rencontre sw au sommet 4 cherché.

En projection verticale, la tangente au sommet est perpendiculaire à

$s'a'$. La droite (cD, c'D$'$) est une droite du plan sécant dont la projection verticale est parallèle à cette tangente. Il faut, comme précédemment, mener le plan tangent, autre que $s a \sigma$, parallèle à cette droite. Son point de contact avec la base est en z, sur la polaire du point de rencontre de σa avec la parallèle à cD menée par s; cette polaire est d'ailleurs obtenue en joignant a au pôle E de la parallèle précédente, lequel pôle est à l'intersection du diamètre perpendiculaire à cD et de la polaire de s, qui est la perpendiculaire à os menée par A. Nous construisons ensuite l'intersection de (sz, $s'z'$) avec le plan sécant, au moyen, par exemple, du plan auxiliaire $s\sigma$Fz. Nous obtenons ainsi le point (5, 5$'$); 5$'$ est le sommet de la projection verticale.

Ponctuation. — En projection horizontale, tout est vu. Les deux cônes n'ont pas de contours apparents. On doit enlever de chaque base la portion intérieure à l'autre.

En projection verticale, le segment $1'd'$ est vu, car il est vu à la fois sur les deux cônes. L'arc $b'2'c'$ est caché, car il est caché sur le premier cône. Les segments de contours apparents $1'j'$ et $1'3'$ sont enlevés, parce que chacun d'eux est intérieur au solide limité par le cône dont il ne fait pas partie. Les portions restantes de contours apparents sont toutes vues, à l'exception de $3'g'$, qui est caché par le premier cône.

9. *Un cylindre a pour base l'hyperbole équilatère* (H, H$'$). *Ses génératrices sont de front et inclinées à 45° sur la ligne de terre. Un cône a pour base un cercle tangent aux deux axes de l'hyperbole aux points a et g. Son sommet (s, s') se projette horizontalement au centre de l'hyperbole et a une cote au-dessus de* H$'$ *égale au demi-axe transverse sa. Représenter la surface du cylindre, supposée opaque et entaillée par le cône* (*fig.* 12).

Les deux surfaces ont une génératrice commune (sa, $s'a'$). Le reste de leur intersection est donc une *cubique gauche* (n° 35).

Asymptotes. — Nous avons un premier point à l'infini, qui est le sommet du cylindre (n° 35). La tangente en ce point est la génératrice (A, A$'$), autre que (sa, $s'a'$), suivant laquelle le cylindre est coupé par le plan tangent au cône le long de (sa, $s'a'$).

Pour avoir les deux autres points à l'infini, nous menons par le sommet du cône des plans parallèles aux plans asymptotes du cylindre. Leurs traces horizontales sont les droites ae et ag. Elles coupent la base du cône aux points e et g et les points cherchés sont les points à l'infini sur les génératrices se et sg. L'asymptote parallèle à se est l'intersection du

plan tangent *sef* avec le plan asymptote de trace *sc*. Les traces horizontales *ef* et *sc* de ces deux plans se rencontrent au point (f, f'). En menant par ce point la parallèle à la génératrice $(se, s'e')$, on obtient l'asymptote (B, B′).

Le plan tangent au cône le long de *sg* est de profil ; il coupe le plan asymptote *sd* suivant la troisième asymptote (C, C′) de la cubique.

Point courant. — Les traces horizontales des plans auxiliaires passent par le point fixe *a*. Soit *ar* l'une d'elles. Elle rencontre les deux bases aux points *r* et *u*. Les génératrices issues de ces points se coupent au point (8, 8′), qui est un point quelconque de la cubique.

Pour avoir la tangente en ce point, nous prenons l'intersection des plans tangents. Les traces horizontales de ces deux plans se rencontrent au point (t, t'), qu'il suffit de joindre à (8, 8′).

Points remarquables. — Les points sur les contours apparents sont tous à l'infini, à l'exception du sommet du cône, qui appartient au contour apparent vertical du cylindre. Pour avoir la tangente en ce point nous prenons l'intersection du cône avec le plan tangent au cylindre le long de $(sa, s'a')$ (n° 35). La trace horizontale *ac* de ce plan rencontre la base du cône au point *h* ; *h*7 est la tangente cherchée, en projection horizontale. En projection verticale, la tangente est $a'7'$.

En esquissant la cubique, on se rend compte qu'elle possède un *point double apparent* en projection horizontale, qui semble très voisin de *c*. La ligne des points doubles (n° 8) passe d'ailleurs rigoureusement par ce point. En effet, le plan diamétral conjugué des cordes verticales par rapport au cylindre a pour trace horizontale l'axe non transverse de l'hyperbole ; le plan analogue pour le cône a pour trace horizontale *ag*. Ces deux traces se rencontrent en *g*. D'autre part, la génératrice $(sa, s'a')$ est parallèle à la fois aux deux plans diamétraux. L'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la ligne des points doubles est donc la parallèle à *sa* menée par *g*, soit *gc* ; elle passe bien par *c*. On est alors conduit à se demander si le point *c* n'est pas exactement le point double apparent.

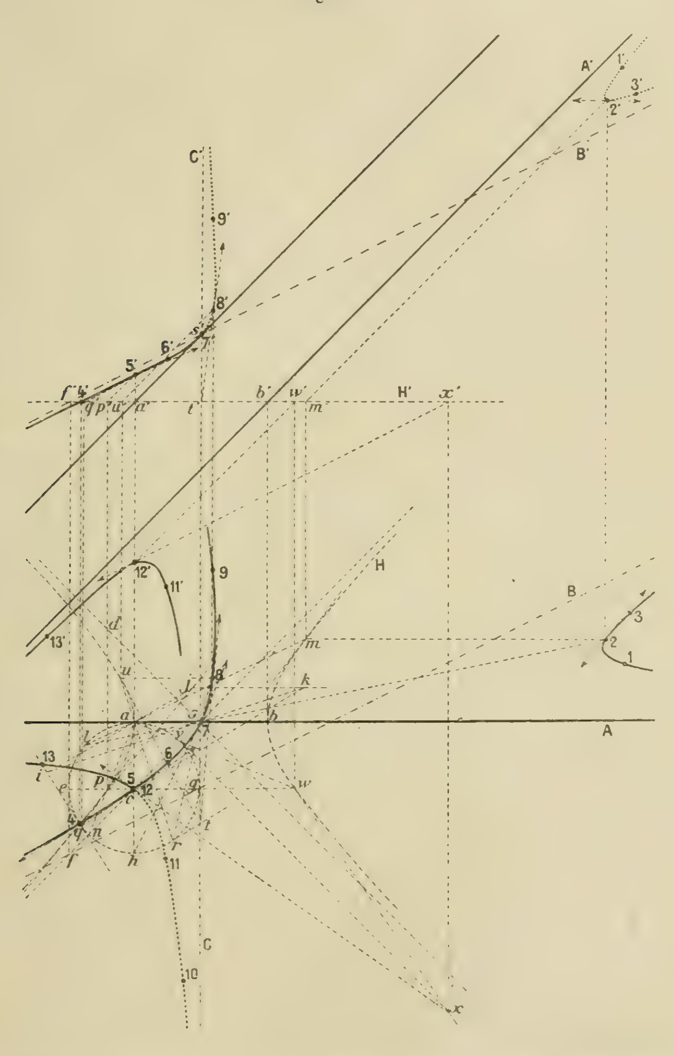
Pour nous en rendre compte, coupons par le plan auxiliaire *ap*, *p* étant la trace horizontale d'une des génératrices du cylindre dont la projection horizontale passe par *c*. Nous obtenons, dans le cône, la génératrice *sn*. Il s'agit de voir si cette droite passe par *c*, en projection horizontale. Or, en se servant de l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes, on voit aisément que $pc = as(\sqrt{2} - 1)$. Donc, si n' désigne le point de rencontre de *ap* avec *sc*, on a

$$(1) \qquad \frac{n'c}{n's} = \frac{pc}{as} = \sqrt{2} - 1.$$

D'autre part, si l'on appelle n'' le point de rencontre de sc avec le cercle, on a

$$(2) \qquad \frac{n''c}{n''s} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Fig. 12.



En comparant (1) et (2), on voit que les points n' et n'' coïncident entre eux et, par suite, avec le point n.

Finalement, le point c appartient à la projection horizontale de la cubique et, comme il est sur la ligne des points doubles, c'est bien le point double apparent. D'ailleurs, on vérifierait, comme précédemment, qu'il est donné également par le plan auxiliaire acw.

En projection verticale, il lui correspond les deux points $5'$ et $12'$. Les tangentes ($5q$, $5'q'$) et ($12x$, $12'x'$) sont obtenues comme la tangente au point courant.

Comme point remarquable, signalons encore le point (2, $2'$), où la tangente est horizontale. Le plan auxiliaire correspondant lam doit couper les deux bases en deux points l et m, où les tangentes sont parallèles (n° 8). En traitant la question par le calcul, on trouve que le coefficient angulaire de la droite lm doit être $\sqrt{\sqrt{5}-2}=0,486$.

Les deux bases se rencontrent au point (4, $4'$). On a construit la tangente en ce point par la méthode habituelle, avec cette seule particularité qu'on a coupé par le plan auxiliaire aij pour obtenir le point k de la tangente. (On n'a pas reproduit la projection verticale de cette dernière, parce qu'elle est trop voisine de la courbe.)

Pour bien guider la courbe, on a encore construit les points 1, 3, 6, 9, 10, 11, 13.

Jonction des points. — Faisons tourner le plan auxiliaire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en partant du plan de front sa. Le point courant vient de l'infini sur (A, A'), passe par les positions (1, $1'$), (2, $2'$), (3, $3'$) et va à l'infini sur (B, B'), la trace du plan auxiliaire étant alors ae. On a une première branche de la cubique. Puis, le point courant part de l'infini sur l'autre extrémité de (B, B'), rencontre successivement (4, $4'$), (5, $5'$), (6, $6'$), (7, $7'$), (8, $8'$), (9, $9'$) et va à l'infini sur (C, C'), la trace du plan auxiliaire étant alors sg. On a une deuxième branche de la cubique. Enfin, le point courant part de l'infini sur l'autre extrémité de (C, C'), passe par (10, $10'$), (11, $11'$), (12, $12'$), (13, $13'$) et va à l'infini sur (A, A'), le plan auxiliaire étant revenu à sa position primitive. On a la troisième et dernière branche de la cubique.

Ponctuation. — Nous devons ponctuer la courbe sur le cylindre.

En projection horizontale, la nappe qui contient a est vue ; il en est donc de même de la branche 4, 5, ..., 9, ..., qui se trouve sur cette nappe. La deuxième nappe serait entièrement cachée par la première, si celle-ci subsistait intégralement. Mais, les portions de génératrices qui sont à droite de l'arc 7, ..., 9, ... et celles qui sont à gauche de l'arc 7, ..., 4, ... sont enlevées, parce qu'intérieures au cône. Il s'ensuit que

l'arc 12, 11, 10, ... est seul caché. Quant à la génératrice sa, elle est entièrement vue.

En projection verticale, les demi-nappes situées en avant du plan de front sa sont vues ; donc, il en est de même de la branche $11'$, $12'$, $13'$ et de la demi-branche $7'$, ..., $4'$, ... La demi-branche $7'$, ..., $9'$, ... et la branche $1'2'3'$ sont, au contraire, cachées, car elles se trouvent derrière des régions non enlevées de la surface du cylindre.

Enfin, le contour apparent vertical du cylindre subsiste intégralement.

Remarque. — Pour la ponctuation, on a supposé les plans de projection transparents.

10. *On donne deux cylindres de révolution ayant pour bases respectives le cercle* (A) *du plan horizontal et le cercle* (B) *du plan vertical. Le rayon du premier est dans le rapport* $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ *avec le rayon du second. On développe les deux cylindres. Construire les développements de leur courbe d'intersection* (*fig.* 13).

Le plan de profil ab', le plan horizontal passant par b' et le plan de front passant par a sont plans de symétrie pour les deux cylindres et, par suite, pour leur intersection. Dès lors, il suffit de construire un huitième de chaque développement et de compléter par symétrie.

Développement du cylindre (B). — Nous le développons sur le plan tangent horizontal $k'6'$, et nous construisons la projection horizontale du développement. La base du cylindre, que nous choisirons comme courbe de référence (n° 37), se développe suivant une droite projetée en xy. Construisons maintenant le développement de l'arc de courbe projeté horizontalement suivant l'arc de cercle cd et verticalement suivant l'arc de cercle $c'd'$. Le point (c, c') donne le point 1, dont l'abscisse $o1'$ est égale à la longueur du quart de cercle $k'c'$ (cette longueur a été obtenue en mesurant le rayon $b'k'$ au double décimètre, multipliant le nombre de millimètres trouvé par $\frac{\pi}{2}$, à la règle à calcul, et reportant le nombre de millimètres donné par ce produit en $o1'$) et qui a même ordonnée que c. Dans l'espace, la tangente en (c, c') est verticale, donc perpendiculaire aux génératrices de (B) ; dans le développement, la tangente en 1 est, par suite, perpendiculaire à $1'1$, c'est-à-dire parallèle à xy.

On peut avoir aisément le rayon de courbure en ce point. C'est, comme on sait (n° 38), le rayon de courbure géodésique de la courbe de l'espace,

considérée comme tracée sur le cylindre (B). D'après le théorème de Meusnier (t. II, n° 335), l'axe de courbure joint les centres de courbure normale de la courbe, considérée comme tracée successivement sur les deux cylindres. Sur (A), ce centre est à l'infini dans la direction ca, car la section normale est la génératrice. Sur (B), la section normale est un cercle, dont le centre est (m, m'). L'axe de courbure est donc la parallèle à ca menée par m. Il faut prendre son intersection avec le plan tangent à (B), lequel est le plan de profil passant par c. Il résulte manifestement de là que le rayon de courbure géodésique cherché se déduit de am par la translation $\vec{ac}$. Comme sa longueur et son sens seuls nous intéressent, il suffit, pour avoir le centre de courbure en 1, de porter le vecteur $\vec{1q}$ équipollent à $\vec{am}$. Le cercle, de centre q et rayon $q1$ est le cercle de courbure.

Le point (d, d') donne le point 5, construit comme le point 1. Dans l'espace, la tangente est parallèle à la ligne de terre, donc encore perpendiculaire aux génératrices de (B); dans le développement, la tangente en 5 est donc encore parallèle à xy. Le centre de courbure normale sur (A) est a; il est sur la génératrice de (B), donc, dans le plan tangent à (B); par suite, c'est le centre de courbure géodésique sur (B). On en déduit le centre de courbure r au point 5; d'où le cercle de courbure.

Nous avons encore construit les points 2, 3, 4, correspondant à (e, e'), (f, f'), (g, g'), les points e', f', g' ayant été pris respectivement au $\frac{1}{3}$, au milieu et aux $\frac{2}{3}$ de l'arc $c'd'$, de sorte que $1'2'$, $1'3'$ et $1'4'$ sont égaux respectivement à $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ de $1'5'$.

Nous avons construit la tangente au point 2, au moyen de la sous-tangente $2's$, qui est égale à $e'n'$. Nous allons voir d'ailleurs que le point 2 est un point d'inflexion.

En utilisant les cinq points construits, les cercles de courbure et la tangente d'inflexion, on peut tracer très exactement l'arc de courbe 12345. Il resterait à le compléter par des symétries par rapport aux axes successifs $11'$, $55'$ et ar.

Recherche des points d'inflexion. — On pourrait chercher les points de la courbe de l'espace où le rayon de courbure géodésique sur (B) est infini. Mais, il paraît plus simple de se servir tout simplement de *l'équation de la transformée*.

Prenons comme axe des x la droite ar et comme axe des y la droite ao. Appelons t l'angle polaire du point e', par exemple, considéré comme un point quelconque, sur le cercle (b'), le rayon origine étant $b'k'$. Si R' désigne la longueur de ce rayon, l'abscisse du point 2 est $x = R't$. Son ordonnée y est celle du point e. Or, cette ordonnée doit être liée à

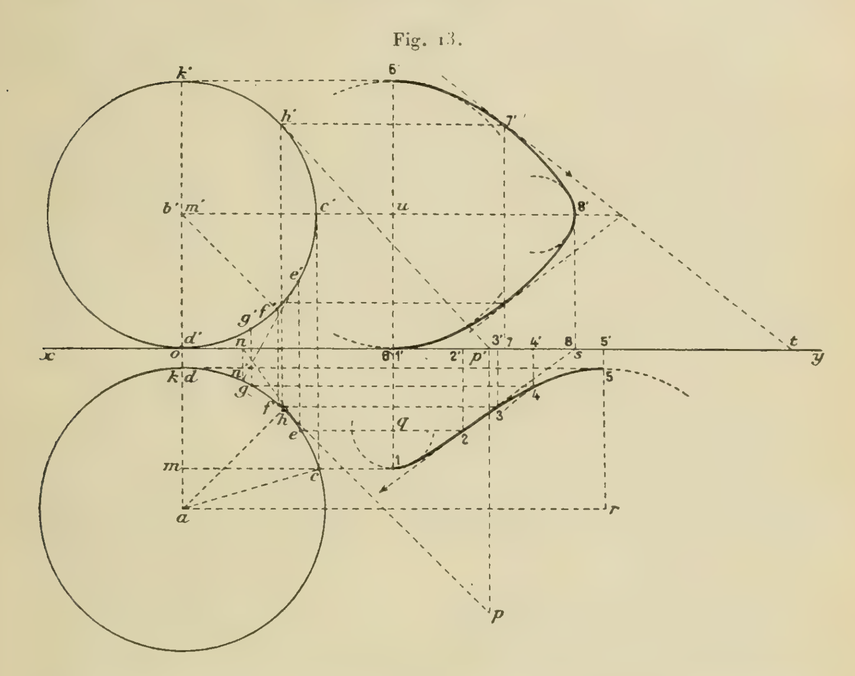
l'abscisse $x' = R' \sin t$ de ce même point par l'équation du cercle (a), c'est-à-dire, en appelant R le rayon de ce cercle, par

$$x'^2 + y^2 = R^2.$$

On en déduit que l'équation cherchée est

$$(1) \qquad R'^2 \sin^2 \frac{x}{R'} + y^2 = R^2.$$

Fig. 13.



Pour avoir les points d'inflexion, il faut annuler la dérivée seconde de y par rapport à x. Dérivons l'équation (1)

$$(2) \qquad R' \cos \frac{x}{R'} \sin \frac{x}{R'} + yy' = 0.$$

Dérivons une nouvelle fois, en introduisant tout de suite l'hypothèse $y'' = 0$,

$$(3) \qquad \cos \frac{2x}{R'} + y'^2 = 0.$$

Enfin, éliminons y' et y entre (3), (2), (1); il vient, en reprenant la

variable t.

$$\frac{R'^2}{4}\sin^2 2t = -\cos 2t.(R^2 - R'^2 \sin^2 t)$$

ou, en posant $\cos 2t = u$,

$$(4) \qquad u^2 R'^2 + 2u(2R^2 - R'^2) + R'^2 = 0.$$

Cette équation du second degré a ses racines réelles si

$$(R'^2 - 2R^2)^2 - R'^4 > 0$$

ou

$$R' < R.$$

Cette condition est remplie pour le développement de (B), qui nous occupe actuellement; mais, elle ne le sera pas pour le développement de (A), qui ne pourra, par suite, donner aucun point d'inflexion.

Les deux racines de (4) sont négatives; leur produit est égal à 1: donc, une seule est comprise entre 0 et -1. Il est aisé de se rendre compte qu'il lui correspond un seul point sur l'arc $c'd'$. Avec les données de l'énoncé, on a $R'^2 = \frac{8}{9}R^2$ et l'équation (4) devient

$$2u^2 + 5u - 2 = 0.$$

La racine acceptable est $-\frac{1}{2}$. On en tire $2t = \pi + \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, ce qui correspond précisément au point e', donc au point 2, ainsi que nous l'avions annoncé tout à l'heure.

Développement du cylindre (A). — Nous l'avons développé sur le plan tangent de front $d5$; mais, pour la clarté de la figure, nous avons fait subir à la projection verticale de la courbe transformée une translation égale à $o1'$ parallèlement à xy. Nous avons construit le développement de l'arc (kc, $k'c'$). Le point (k, k') donne 6'. Dans l'espace, la tangente en ce point est parallèle à la ligne de terre; dans le développement, elle garde cette direction. En raisonnant comme tout à l'heure, pour le point 5, on voit que le centre de courbure est le point u.

Le point (c, c') donne le point 8', dont l'abscisse 68 a été évaluée en mesurant, au moyen d'un rapporteur, l'angle au centre $\widehat{kac}$ et, au moyen d'un double décimètre, le rayon ak. La tangente dans l'espace est verticale et le demeure dans le développement. Le centre de courbure géodésique sur le cylindre (A) est le point de rencontre de la parallèle à ac menée par m avec le plan tangent en c à (A): il s'ensuit évidemment que

le rayon de courbure géodésique et, par suite, le rayon de courbure en 8 sont égaux à la distance de m à ac.

Nous avons construit le point $7'$, homologue de (h, h'), l'angle $\widehat{kah}$ étant égal à $\frac{\pi}{4}$. La tangente en ce point a été obtenue au moyen de la sous-tangente $7t = hp$.

En utilisant ces trois points, la tangente et les cercles de courbure, on peut tracer très exactement l'arc de courbe $6'7'8'$. On l'a complété par symétrie relativement à $b'8'$; il resterait à faire les symétries par rapport aux perpendiculaires à xy ayant pour abscisses, à partir de 6, le quart et la moitié de la circonférence (a).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Un cône a pour base un cercle dans le plan horizontal. Il est éclairé par un point lumineux P. Construire son ombre propre et son ombre portée sur les plans de projection.

2. Mêmes données. Construire l'ombre portée par le cône sur un plan perpendiculaire à la droite PS.

3. On donne un plan P par ses traces et, dans ce plan, une ellipse, de projection horizontale circulaire. Un cylindre a pour base cette ellipse; on donne la direction de ses génératrices. Construire ses contours apparents, ainsi que son ombre au soleil (rayons lumineux à 45°). Construire la projection horizontale d'un point du cylindre, connaissant sa projection verticale et *vice versa*.

4. On donne un cône à base horizontale circulaire, une droite D et un plan P. Mener une normale au cône s'appuyant sur D et parallèle à P. (On est ramené à mener un plan tangent perpendiculaire à P.)

5. On donne un cylindre à base horizontale circulaire et une droite D. Mener à ce cylindre une normale s'appuyant sur D et faisant avec cette droite un angle donné. (La direction de la normale cherchée résulte de l'intersection d'un cône de révolution avec un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre.)

6. On donne un cône à base horizontale circulaire et un cylindre à base frontale circulaire. Construire leurs normales communes.

7. Un cône a pour base, dans le plan horizontal, un cercle de rayon 50 et de centre (50, 100, 0). Son sommet a pour coordonnées (—50, 150, 100).

Construire les sections par les plans suivants :

$$4x + 2y + 3z - 320 = 0 \quad \text{(hyperbole)};$$
$$6x - 2y + 3z - 100 - 20\sqrt{10} = 0 \quad \text{(ellipse)};$$
$$y - z - 100 = 0 \quad \text{(parabole)}.$$

8. Un cône a pour base un cercle dans le plan vertical; on le coupe par le premier bissecteur. Chercher les points de l'intersection qui ont leur projection verticale sur une droite donnée.

9. Mêmes données. Construire les points les plus hauts et les plus bas, les plus à droite et les plus à gauche des deux projections de l'intersection.

10. On donne, dans le plan horizontal, un triangle équilatéral *abc*, dont le sommet *a* a pour coordonnées (0, 200, 0) et dont le côté *bc* est parallèle à la ligne de terre et a pour éloignement 50. Un cône de révolution a pour base le cercle circonscrit à ce triangle; son sommet S a pour cote 200. Une pyramide a pour base le triangle; son sommet se trouve sur la verticale de S et a pour cote 100. Représenter le solide commun.

(Les sections planes sont des paraboles. Remarquer la symétrie ternaire de la projection horizontale; *cf.* Exercice résolu n° 1 du Chapitre II.)

11. On considère des rayons lumineux à 45° et un cercle ayant son plan perpendiculaire à ces rayons et son centre sur la ligne de terre. Construire les ombres portées sur les deux plans de projection.

12. On reprend l'ellipse du n° 3. Un cône a pour base cette ellipse et pour sommet un point de projection horizontale donnée, mais de cote inconnue. Déterminer cette cote pour que la trace horizontale du cône soit une parabole et construire cette parabole.

13. Même question, la trace horizontale devant être une hyperbole dont les asymptotes fassent un angle donné. De plus, on supposera que la projection horizontale du sommet se trouve au centre de la projection horizontale de l'ellipse de base ou bien n'importe où sur cette projection.

14. On donne un cône à base horizontale circulaire et une droite D. Mener par cette droite un plan coupant le cône suivant une parabole.

15. On donne un cône à base horizontale circulaire. Construire un plan

cyclique non horizontal. (On peut chercher directement la section antiparallèle en faisant tourner ou rabattant le plan vertical passant par le sommet et par le centre de la base. On peut aussi couper le cône par une sphère de rayon nul ayant son centre au sommet; le plan cyclique demandé est déterminé par le sommet et par l'axe radical du cercle de base et de la trace horizontale de la sphère précédente. Enfin, on peut couper par une sphère quelconque passant par le cercle de base et chercher le plan du deuxième cercle d'intersection, en coupant par des plans horizontaux.)

16. Un cône, de sommet (50, 60, 150), a pour base, dans le plan horizontal, un cercle de centre (— 50, 50, 0) et de rayon 50. Un deuxième cône, de sommet (— 80, 30, 150), a pour base, dans le plan horizontal, un cercle tangent extérieurement au précédent et de centre (70, 100, 0). Représenter l'ensemble des deux solides.

17. Un cylindre, dont les génératrices sont de front et inclinées à 45° sur la ligne de terre (de gauche à droite, en montant), a pour base, dans le plan horizontal, un cercle de rayon 60 et de centre (0, 60, 0). Un plan, dont la trace verticale est parallèle aux génératrices précédentes et coupe la ligne de terre au point d'abscisse —90, est tangent au cylindre ci-dessus. Un second cylindre, à génératrices horizontales, est tangent au plan précédent et au plan horizontal; sa base dans le plan vertical est un cercle dont le centre a pour abscisse 60. Représenter le second cylindre entaillé par le premier et limité à un plan de front d'éloignement 140.

18. Un triangle rectangle isoscèle a son hypoténuse verticale et égale à 120. L'extrémité inférieure de cette hypoténuse a pour coordonnées (— 12, 60, 0). Ce triangle, en tournant autour de son hypoténuse, engendre un double cône. Un cylindre, dont les génératrices font, avec xy, 60° dans les deux projections, en montant de gauche à droite, a pour base, dans le plan horizontal, un cercle de 45 de rayon et de centre (— 50, 165, 0). Représenter le double cône entaillé par le cylindre.

19. Un cône a pour sommet le point (— 80, 160, 25) et pour base, dans le plan vertical, un cercle de centre (— 17, 0, 90) et de 72 de rayon. Un cylindre a ses génératrices de front et inclinées à 40° sur la ligne de terre, en montant de gauche à droite. Sa base est un cercle du plan horizontal, de rayon 55 et de centre (— 75, 80, 0). Représenter le solide commun.

20. Un cylindre a ses génératrices de front et à 45° sur xy (en montant de gauche à droite). Sa base dans le plan horizontal est un cercle

de centre (— 100, 60, 0) et de rayon 60. Un cône a pour sommet le point (— 50, 150, 100). Sa base dans le plan vertical est un cercle passant par la projection verticale du sommet et ayant pour centre le point (30, 0, 150). Représenter le cône entaillé par le cylindre. On déterminera, en particulier, la ligne des points doubles apparents dans chaque projection, ainsi que les points les plus hauts et les plus bas de la projection horizontale.

21. On donne deux cercles dans le plan horizontal, ayant pour rayons respectifs 60 et 40 et pour centres les points (— 60, 60, 0) et (50, 80, 0). Le premier est la base d'un cône de sommet (50, 120, 70) et le second est la base d'un autre cône de sommet (— 60, 120, 160). Représenter l'ensemble des deux solides. On déterminera, en particulier, les tangentes au point double.

22. Un cône a pour sommet le point S(10, 100, 200). Sa base dans le plan horizontal est un cercle de rayon 70 et dont le point le plus à droite est la projection horizontale de S. Un autre cercle, tangent extérieurement en ce point au premier, a pour rayon 35. Un cylindre admet ce cercle pour base; ses génératrices sont parallèles à la droite qui joint S au centre de similitude externe des deux cercles. Représenter le solide commun. (On remarquera que l'intersection se décompose en deux coniques.)

23. On donne dans le plan horizontal deux cercles C et C_1, tangents extérieurement en un point de coordonnées (— 25, 75, 0); la ligne des centres est parallèle à la ligne de terre; les rayons du cercle de gauche et du cercle de droite sont respectivement 50 et 75. Un cône a pour base le cercle C (de gauche) et pour sommet un point S projeté horizontalement au point le plus en avant de C_1 et de cote 210. Un deuxième cône a pour base C_1 et pour sommet un point projeté horizontalement au point de contact des deux cercles et de cote 140. Représenter l'ensemble des deux solides.

24. Un cercle de rayon 35 est tangent en o à xy, dans le plan horizontal. Un cône a pour base ce cercle et pour sommet le point (0, 0, 90). Un deuxième cône a pour sommet (35, 0, 180) et pour base un cercle double du précédent, tangent à xy au point d'abscisse — 35 et situé dans le plan horizontal. Solide commun. (On cherchera, en particulier, la tangente au point de rebroussement et les asymptotes.)

25. Deux cercles, de même rayon 50 et tangents extérieurement, sont tracés dans le plan vertical, tangentiellement à la ligne de terre; leur

point de contact a pour abscisse — 25. Deux cônes ont pour bases ces deux cercles; le sommet de chacun d'eux se projette verticalement au centre de la base de l'autre; le sommet le plus à gauche a pour éloignement 240 et l'autre a pour éloignement 120. Ensemble des deux solides. (On cherchera les asymptotes des branches virtuelles de la projection horizontale, en portant les deux cônes au même sommet et remarquant que le plan vertical est déjà un plan de sections homothétiques. On cherchera aussi les tangentes aux points d'arrêt de la projection horizontale, au moyen du théorème de Meusnier.)

26. Un cône a pour base, dans le plan horizontal, un cercle C, de 70 de rayon et de centre (— 70, 70, 0); son sommet est le point (0, 210, 140). Un cylindre a pour base, dans le plan vertical, un cercle égal et tangent au précédent; ses génératrices ont pour paramètres directeurs (1, 1, 1). Représenter le cylindre entaillé par le cône.

27. On donne dans le plan horizontal deux cercles C et C_1, de rayon commun 40 et de centres respectifs (— 20, 100, 0) et (20, 60, 0). Un cône a pour base C et pour sommet (— 20, 220, 90). Un autre cône a pour base C_1 et pour sommet (— 20, 140, 45). Ensemble des deux cônes.

28. Dans le plan horizontal, on donne une hyperbole équilatère, de centre (— 50, 100, 0) et d'axe transverse parallèle à xy et de longueur 100. Cette hyperbole sert de base à un cylindre dont les génératrices ont pour paramètres directeurs (1, — 1, 1). Un cône a pour sommet le point (25, 50, 75) et pour base le cercle concentrique et bitangent à l'hyperbole précédente. Représenter le cylindre entaillé par le cône.

29. On reprend le cylindre précédent et l'on remplace le cône par un cylindre admettant la même base et dont les génératrices ont pour direction la bissectrice de l'angle que fait une génératrice du premier cylindre avec le plan horizontal. Solide commun. (Le point à l'infini sur les génératrices du second cylindre est un point double de l'intersection.)

30. Un cône a pour sommet (— 50, 50, 80) et pour base un cercle du plan horizontal, de centre (— 100, 100, 0) et de rayon 30. On lui fait subir la translation (140, — 50, 80). Représenter le nouveau cône entaillé par l'ancien.

31. Un triangle équilatéral, de côté 100, tourne autour d'une de ses hauteurs et engendre ainsi un cône de révolution. On coupe ce cône par un plan perpendiculaire au plan du triangle mené par une hauteur

autre que l'axe du cône. Construire le développement de la section ainsi obtenue.

32. Construire le développement d'une section plane de cylindre de révolution.

33. Un cylindre de révolution, de rayon 50, est tangent au plan vertical le long d'une verticale d'abscisse — 90. On le coupe par un cône de révolution admettant pour axe la génératrice le plus en avant du cylindre, pour angle au sommet un angle droit et zéro pour cote de son sommet. Représenter le cylindre entaillé par le cône et le développer ensuite sur le plan vertical.

34. Un cylindre a pour base un cercle de rayon 60 du plan horizontal, ses génératrices sont de front et inclinées à 45° sur la ligne de terre. Construire le développement de sa base.

CHAPITRE IV.

SPHÈRE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Une lentille biconvexe est constituée par la partie commune à deux sphères* (O) *et* (O_1) *orthogonales au point* (a, a') *le plus en arrière de la sphère* (O). *Représenter cette lentille, ainsi que son ombre portée sur les plans de projection, en la supposant éclairée par des rayons lumineux à* 45° (*fig.* 14).

Intersection des deux sphères. — Cette intersection est un cercle projeté horizontalement suivant l'axe radical ab des contours apparents horizontaux. La projection verticale est une ellipse, dont le petit axe est $a'b'$. Le grand axe est la projection verticale du diamètre vertical du cercle, lequel est projeté horizontalement au point c, milieu de ab. On obtient ses extrémités c' et c'', en coupant par le plan de front du point c (n° 39). On peut aussi remarquer que $c'c'' = ab$. Les points c' et e'' sur le contour apparent vertical de (O) ont été obtenus en coupant par le plan de front oe. En projection horizontale, la lentille est représentée par le segment ab, vu en entier et par les deux arcs de contour apparent amb et afb, dont chacun limite la portion de l'une des sphères intérieure à l'autre. En projection verticale, l'ellipse est vue en entier, car le cercle est vu sur la sphère (O_1). Il ne reste rien du contour apparent de cette dernière et il reste l'arc $e'l'e''$ du contour apparent de (O).

Ombre propre. — La courbe d'ombre propre de la sphère (O) est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire aux rayons lumineux. Il se projette suivant deux ellipses. En projection horizontale, le grand axe est la projection du diamètre horizontal; il est donc perpendiculaire à la projection horizontale du rayon lumineux (ol, $o'l'$); of est la moitié de ce grand axe.

Pour avoir le petit axe, on pourrait couper par le plan vertical ol et faire

un rabattement ou une rotation. On peut aussi employer la méthode classique suivante. Faisons tourner les rayons lumineux autour du diamètre vertical de la sphère, jusqu'à ce qu'ils soient de front; le rayon $(ol, o'l')$ vient en $(ol_1, o'l'_1)$. Le plan d'ombre propre est maintenant un plan de bout, dont la trace verticale $o'g'_1$ est perpendiculaire à $o'l'_1$; il en résulte que le petit axe de la projection horizontale est og_1. En revenant en place (g_1, g'_1) vient en (g, g'). Le point g est un des sommets du petit axe cherché; quant à g', c'est le point le plus haut de la projection verticale.

Toutes les constructions que nous venons de faire peuvent être répétées pour la projection verticale; mais, cela est inutile, à cause de la symétrie qui existe entre les deux projections (¹); la projection verticale est une ellipse égale à la projection horizontale, inclinée symétriquement par rapport à la direction de la ligne de terre.

Il nous serait facile maintenent de construire par points ces deux ellipses. Mais, nous n'avons besoin que de ce qui appartient véritablement à la lentille. Dès lors, il nous faut chercher les deux points d'intersection du cercle d'ombre propre avec le plan vertical ab. Le plan du cercle étant déterminé par une horizontale et une frontale, on a, en $(ih, i'h')$, la droite d'intersection de ce plan avec le plan ab. Nous rabattons maintenant celui-ci autour de l'horizontale $(ab, a'b')$. Notre droite se rabat en IhII (on a rabattu le point projeté horizontalement en c). Le cercle d'intersection des deux sphères est rabattu suivant le cercle de diamètre ab. Il rencontre le rabattement de la droite en I et II, qui se relèvent en $(1, 1')$ et $(2, 2')$.

En projection horizontale, l'arc $f1$ est seul vu; en projection verticale, il n'y a que le tout petit arc $d'2'$, que l'on ne peut d'ailleurs distinguer pratiquement, sur la figure, du contour apparent vertical de la sphère.

On a construit la tangente au point 1, en rabattant le cercle d'ombre propre autour de son diamètre horizontal of. (Sur la figure, on a seulement indiqué la construction analogue de la tangente au point 3.)

On construit, de la même manière, la courbe d'ombre propre de la portion de lentille qui appartient à la deuxième sphère. On peut, toutefois, apporter quelques simplifications de détail, en utilisant les constructions précédentes. C'est ainsi qu'il est inutile de refaire la construction du

---

(¹) Dans l'espace, les rayons lumineux sont parallèles au premier bissecteur; donc, le plan parallèle à ce plan mené par le centre de la sphère est un plan de symétrie pour la courbe d'ombre propre; il est ensuite facile de voir que deux points homologues dans cette symétrie auraient leurs projections de noms contraires symétriques l'une de l'autre par rapport à la ligne de terre, si le centre de la sphère se trouvait sur cette ligne.

petit axe, si l'on se sert de l'homothétie des deux ellipses dans chaque projection. De même, pour déterminer les points (3, 3') et (4, 4'), il suffit de construire le point (i, i'') et de remarquer que le rabattement III i IV est parallèle à I h II.

En projection horizontale, on voit l'arc $m3$; en projection verticale on voit tout l'arc $3'm'4'$. (On n'a pas construit la tangente en 4', parce que ce point est très voisin d'un sommet de l'ellipse. La tangente en m' est parallèle au diamètre conjugué des cordes horizontales et, par conséquent, parallèle à $o'g'$.)

La distinction des régions éclairées de chaque sphère étant évidente, il n'y a aucune difficulté à mettre les hachures. Le petit triangle curviligne $d'2'e''$ de la projection verticale est dans l'ombre; mais, il a été impossible de le couvrir de hachures, à cause de son exiguïté.

Ombre portée. — L'ombre portée sur chaque plan de projection comprend trois arcs de courbe, qui sont les traces des cylindres circonscrits aux deux sphères et du cylindre ayant pour base le cercle d'intersection. On peut dire encore que l'ombre portée sur le plan horizontal, par exemple, est la projection, faite parallèlement aux rayons lumineux, des quatre arcs de cercle projetés horizontalement en $3m4$, 42, $2f1$, 13. Toutes ces projections cylindriques sont évidemment des arcs d'ellipses.

Commençons par projeter les points 1, 2, 3, 4. Autrement dit, menons une parallèle aux rayons lumineux par chacun d'eux et prenons la trace de cette parallèle sur le plan de projection le premier rencontré. Les points (1, 1') et (3, 3') donnent 1'' et 3'' sur le plan vertical; les deux autres donnent 2'' et 4'' sur le plan horizontal. (Le point 2'' n'est pas marqué sur la figure, parce qu'il est caché. Il a été néanmoins construit au crayon, ainsi que sa tangente, afin de guider le tracé de l'arc e'' 2'', dont une partie est vue.)

Les tangentes en chacun de ces points sont très faciles à obtenir. Par exemple, la tangente au point 1'' est la trace verticale du plan tangent au cylindre circonscrit à la sphère (O) le long de la génératrice 1 1''. Or, ce plan n'est autre que le plan tangent en (1, 1') à la sphère; il est donc perpendiculaire au rayon ($o1$, $o'1'$) et sa trace verticale, c'est-à-dire la tangente cherchée, est perpendiculaire à $o'1'$. Ceci est la tangente à la projection cylindrique de $1f2$. Mais, c'est aussi la tangente à la projection cylindrique de l'arc de cercle 13, car le plan tangent au cylindre projetant cet arc, au point (1, 1'), est encore le plan tangent à la sphère (O), puisqu'il contient deux droites de ce plan, à savoir la tangente au cercle et le rayon lumineux.

Deux autres points importants sont les points de rencontre avec la

ligne de terre. On les a construits en cherchant l'intersection de cette ligne avec chacun des cylindres circonscrits. A cet effet, on a coupé par le plan parallèle aux rayons lumineux mené par xy (n° 46). Ce plan n'est autre que le premier bissecteur. Pour construire le point v'', par exemple, on a pris la trace de ce plan sur le plan d'ombre propre de (O). Cette trace a été déterminée par les points (s, s') et (u, u'), intersections du premier bisescteur avec les horizontales du plan d'ombre propre passant par les points (o, o') et (g, g'). On a ensuite rabattu ce dernier plan autour de l'horizontale (os, $o's'$); on a pris l'intersection de la droite su_1 avec le cercle de contour apparent horizontal, suivant lequel se rabat le cercle d'ombre propre. Un seul point v_1 correspond à l'arc utile $1f2$: la parallèle à ol menée par ce point rencontre la ligne de terre au point v'' cherché. Les tangentes en ce point ont été construites comme les tangentes aux points $1''$, $2''$, $3''$, $4''$. (Il a fallu, pour cela, relever le point v_1; cette construction n'est pas indiquée sur la figure.)

Le point r'' a été construit d'une manière analogue, au moyen du cylindre circonscrit à (O_1). Toutefois, on a négligé de faire le rabattement précédent et l'on s'est borné à prendre l'intersection de la droite $n'q'$ avec l'arc d'ellipse $3'm'4'$; le point r' obtenu a été ensuite projeté obliquement, en r'', sur xy. [Le point q' est le point de rencontre du premier bissecteur avec l'horizontale du point (p, p'); le point p' a d'ailleurs été obtenu en se rappelant que o'_1p' est parallèle à $o'g'$.]

Les éléments que nous venons de construire suffisent pratiquement pour tracer l'ombre portée. Toutefois, il est utile de savoir déterminer les axes de chacun des arcs d'ellipse qui constituent cette ombre. Le sommet w'', par exemple, est la trace verticale du rayon lumineux passant par le point (w, w'), où la tangente à la courbe d'ombre propre est de front. Le point w' n'a pas été marqué; car, cela eût été inutile, puisque la projection verticale du rayon lumineux passe par o'. Quant au point w, il se trouve sur la ligne de rappel qui passe par le sommet opposé à g de la projection horizontale ([1]), la droite ow ayant, d'autre part, une direction symétrique de $o'g'$ par rapport à la ligne de terre.

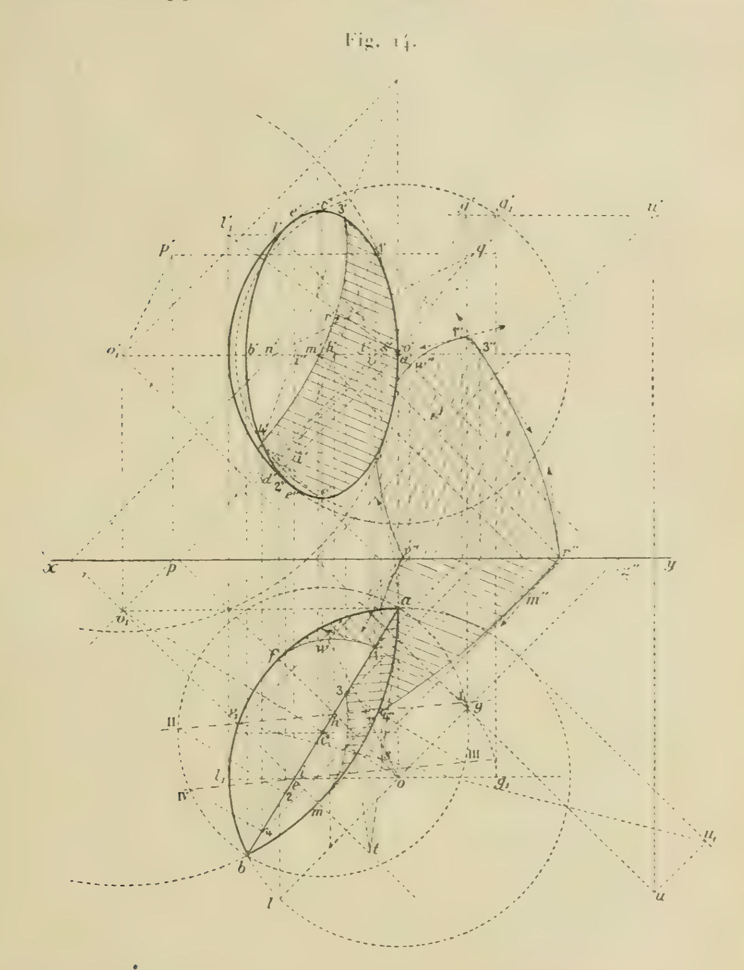
En prenant la trace z'' du rayon lumineux qui passe par (o, o'), on a le centre de l'ellipse considérée. On en déduit le petit axe, qui est perpendiculaire à $z''w''$ et a pour longueur le diamètre de la sphère (O). Outre le sommet w'', on a construit le sommet m'', projection oblique du point (m, m'). La tangente en ce point est mm'', trace du plan tangent au cylindre circonscrit. On n'a cherché aucun élément relatif au petit

---

(1) Puisque c'est la projection horizontale d'un des sommets du petit axe de la projection verticale.

arc $1''3''$, les extrémités et les tangentes en ces points suffisant pour le tracer avec une approximation convenable.

Fig. 14.



2. *On donne une sphère et un cône, à base horizontale circulaire, de sommet* (s, s') *sur le grand cercle de front de la sphère. Une génératrice de contour apparent vertical est la tangente* $s'd'$ *à ce grand cercle; l'autre est* $s'1'$. *Représenter la sphère entaillée par le cône.* (*fig.* 15).

Éléments de la projection verticale. — Le plan de front *os* est un plan de symétrie commun des deux surfaces, donc de leur intersection.

Comme celle-ci est une biquadratique, sa projection verticale est une conique (n° 10). Cherchons son genre et, s'il y a lieu, ses asymptotes. A cet effet, il nous faut chercher quels sont, parmi les plans de bout, ceux qui coupent les deux surfaces suivant des sections homothétiques. Comme toutes les sections de la sphère sont des cercles, cela revient à chercher les plans cycliques du cône. Nous avons d'abord les plans horizontaux; donc, la ligne de terre est une première direction asymptotique. Pour avoir l'asymptote correspondante, nous prenons l'intersection a' des diamètres conjugués des plans horizontaux (n° 10) et, par ce point, nous menons la parallèle A à la ligne de terre.

L'autre direction asymptotique est la direction $d'c'$ antiparallèle à A par rapport à l'angle $d's'1'$. L'asymptote correspondante B se construit, comme la précédente, au moyen du point de rencontre b' des diamètres $s'c'$ et $o'b'$.

En définitive, la projection verticale de l'intersection est une hyperbole, dont nous possédons les asymptotes et un point, à savoir le point s'. Nous pouvons donc, dès maintenant, la construire. Un arc seulement est la projection des parties réelles de la courbe de l'espace; il est limité par les points s' et $1'$, le reste de l'hyperbole étant constitué par des branches virtuelles (n° 10).

Cherchons les tangentes aux points d'arrêt s' et $1'$. La tangente en s' est évidemment $s'd'$, car cette droite est la trace du plan tangent commun en (s, s') aux deux surfaces. Dans l'espace, le point (s, s') est un point double, dont les tangentes sont les génératrices d'intersection du cône avec le plan tangent en (s, s') à la sphère; ces deux génératrices sont confondues avec la génératrice de contour apparent vertical $(sd, s'd')$. Le point (s, s') est donc *un point de rebroussement*, ce qui ne se voit, bien entendu, qu'en projection horizontale.

Au point $(1, 1')$, la tangente est de bout, car les plans tangents en ce point aux deux surfaces sont de bout et distincts. En projection horizontale, la tangente au point 1 est perpendiculaire à la ligne de terre. Mais, en projection verticale, il nous faut chercher la trace du plan osculateur (n° 1). A cet effet, nous appliquons le théorème de Meusnier (n° 6). Le centre de courbure normale de la sphère est (o, o'). Quant à celui du cône, il se trouve d'abord sur la normale $1'e''$ (perpendiculaire à $s'1'$) et ensuite sur l'axe $e'e''$ du cercle de section par le plan horizontal du point $1'$, lequel cercle est bien tangent à la droite de bout; ce centre de courbure normale est donc le point e''. Le centre de courbure de la courbe d'intersection est maintenant la projection de $1'$ sur $o'e''$; par suite, la tangente en $1'$ est perpendiculaire à $o'e''$.

Nous pouvons profiter de cette construction pour avoir le centre de

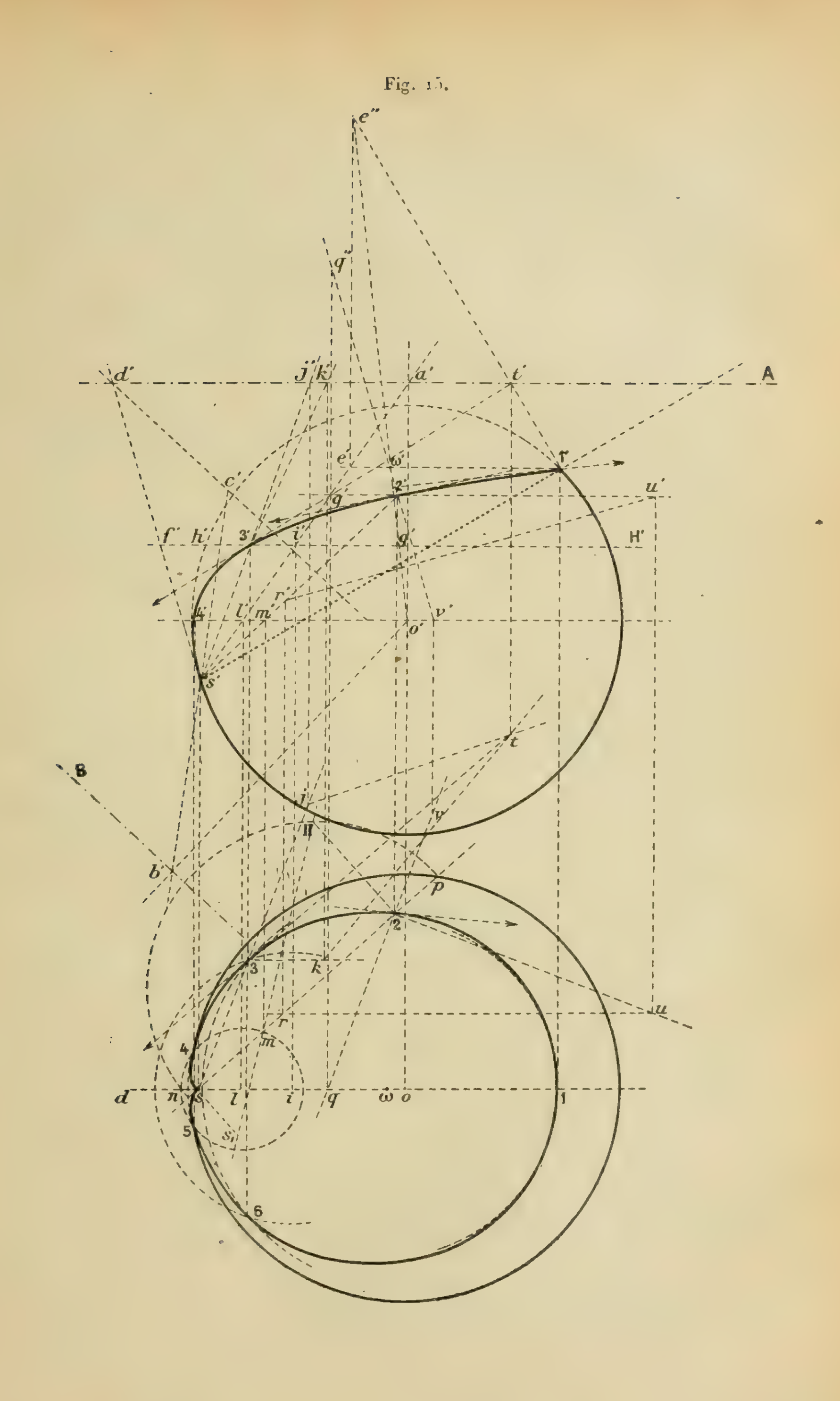


Fig. 15.

courbure de la projection horizontale au point 1. Il suffit d'appliquer encore une fois le théorème de Meusnier, mais au cylindre projetant horizontalement la courbe. Le centre de courbure de la section droite de ce cylindre se trouve sur l'axe de courbure de la courbe de l'espace, c'est-à-dire sur $o'e''$; il se trouve aussi sur la normale au cylindre; c'est donc le point (ω, ω'); ω est le centre de courbure cherché (¹).

Construction d'un point quelconque. — Notre cône possède à la fois des cercles et des droites. De là résultent deux méthodes pour construire un point quelconque de l'intersection (n° 45).

Première méthode. — Coupons par un plan horizontal H'; il coupe la sphère suivant un cercle, de rayon $g'h'$ et dont la projection horizontale est un cercle égal, de centre o; il coupe le cône suivant un autre cercle de centre (i, i') et de rayon $i'f'$ et projeté également en vraie grandeur sur le plan horizontal. Ces deux cercles se coupent en deux points symétriques par rapport au plan de front od; $(3, 3')$ est l'un d'eux.

Les points $(4, 4')$ et $(5, 4')$ du contour apparent horizontal de la sphère ont été obtenus de cette manière.

Pour avoir la tangente en $(3, 3')$, on a pris l'intersection des plans tangents, en les coupant par le plan horizontal auxiliaire A. Le plan tangent au cône contient la génératrice $(s3, s'3')$, qui est coupée par A au point (j, j'); il contient aussi la tangente au cercle de section par H', laquelle est perpendiculaire au rayon $i3$; le plan horizontal A coupe le plan tangent suivant une parallèle à cette tangente, projetée horizontalement en jt, perpendiculaire à $i3$. Le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon $(o3, o'3')$. La frontale $(3k, 3'k')$ perce le plan A en (k, k'); par le point k, nous menons ensuite une perpendiculaire kt à $o3$ et nous avons la projection horizontale de l'intersection du plan auxiliaire avec le plan tangent à la sphère. Cette droite rencontre jt au point t, qui se rappelle en t' sur A. La tangente au point $(3 3')$ est finalement $(3t, 3't')$.

Deuxième méthode. — Nous allons construire l'intersection de la génératrice $(sm, s'm')$ avec la sphère. A cet effet, nous coupons par le plan projetant horizontalement cette droite (n° 40) et nous rabattons ce plan sur le plan horizontal du centre de la sphère. Le cercle d'intersection avec la sphère se rabat suivant un cercle de diamètre np et la droite suivant s_1m. Ces deux rabattements se rencontrent au point s_1, qui ne nous intéresse pas et au point H, qui se relève en $(2, 2')$.

(¹) La ligne de rappel $\omega\omega'$ a été oubliée sur la figure.

Pour varier, construisons la tangente en ce point par la méthode des normales. La normale à la sphère est $(o2, o'2')$. La normale au cône est projetée horizontalement suivant le rayon $2q$ du cercle de section du cône par le plan horizontal $2'q'$. Pour avoir sa projection verticale, nous coupons le plan tangent par le plan de front ru. Ce plan rencontre la génératrice en (r, r') et la tangente au cercle en (u, u'); la projection verticale de la normale au cône est la droite $2'v'$ perpendiculaire à $r'u'$. Il faut mener maintenant la perpendiculaire au plan des deux normales. En projection horizontale, nous menons la perpendiculaire à l'horizontale ov et, en projection verticale, nous menons la perpendiculaire à la frontale $o'q''$.

Pour mieux guider la courbe en projection horizontale, on a construit un autre point, par la deuxième méthode, entre les points 1 et 2. En se servant du cercle de courbure au point 1, on a pu tracer la courbe avec une exactitude suffisante.

Ponctuation. — Il faut ponctuer la courbe sur la sphère. En projection verticale, tout est vu. En projection horizontale, l'arc $5s4$ serait caché; mais, il redevient vu comme contour apparent (n° 11, II, c), la portion de sphère qui le cachait étant enlevée par le cône.

L'arc $4n5$ du contour apparent horizontal de la sphère et l'arc $s'h'1'$ de son contour apparent vertical sont enlevés, parce qu'intérieurs au cône. Le segment $s'1'$ est seul conservé dans le contour apparent du cône; il est évidemment caché par la sphère.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Construire l'intersection d'une sphère avec une droite de profil déterminée par deux de ses points.

2. Construire les pieds des normales abaissées d'un point donné sur une sphère.

3. Construire les pieds des normales abaissées d'un point donné sur la section d'une sphère par un plan donné.

4. On donne un point P à l'intérieur d'une sphère. Construire les deux projections du petit cercle de la sphère ayant pour centre ce point.

5. On donne un point P sur une sphère. Construire les deux projections du petit cercle de la sphère qui admet P pour pôle et les deux tiers du rayon de la sphère pour rayon.

6. On donne deux sphères de rayons respectifs 100 et 70 et de centres respectifs (— 50, 100, 100) et (50, 70, 70). Représenter la grande entaillée par la petite.

7. On prend les deux sphères précédentes et l'on en ajoute une troisième, de centre (0, 50, 50) et de rayon 50. Représenter le solide commun aux trois sphères.

8. On donne une sphère de centre (0, 60, 50) et de rayon 50 et un point lumineux (— 110, 170, 160). Construire l'ombre propre de la sphère et son ombre portée sur les deux plans de projection. Construire les foyers de chaque ombre portée en appliquant le théorème élémentaire de Dandelin.

9. On donne une sphère et une droite. Construire l'angle des plans tangents à la sphère menés par la droite. (Le problème revient à construire la distance du centre de la sphère à la droite.)

10. Mener, par une droite donnée, un plan coupant une sphère donnée sous un angle donné. (Les plans qui coupent une sphère donnée sous un angle donné enveloppent une sphère concentrique.)

11. On donne une sphère S, une droite D et un point P. Mener, par P, une droite rencontrant D et coupant S sous un angle donné. (Les droites qui coupent S sous un angle donné sont tangentes à une sphère concentrique.)

12. Mener, par un point donné, un plan tangent à deux sphères données. (Le plan doit passer par un centre de similitude des deux sphères.)

13. Construire les plans tangents communs à trois sphères données.

14. Construire les plans tangents communs à deux cônes de révolution de même sommet. (On se ramène à 12, en inscrivant des sphères.)

15. Construire les normales communes à deux cônes de révolution.

16. On donne un cylindre quelconque à base horizontale circulaire et une droite D. Mener au cylindre une normale s'appuyant sur D et faisant avec cette droite un angle donné. (Chercher d'abord la direction de cette normale par l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan perpendiculaire à D.)

17. Mener, par une droite D, un plan coupant un cône de révolution donné suivant une parabole (*cf.* Exercice proposé n° 14 du Chapitre III).

18. Même question, la conique devant être une hyperbole dont les asymptotes font un angle donné ou une ellipse semblable à une ellipse donnée. (Les plans coupant suivant une conique satisfaisant à la condition imposée sont parallèles aux plans tangents d'un cône de révolution.)

19. On donne un cône de révolution et une droite D. Mener une normale au cône coupant D sous un angle donné.

20. Un cône de révolution a pour sommet le point (10, 150, 140). Son axe passe par le point (— 100, 60, 70). Enfin, l'angle au sommet est 80°. Construire l'ombre propre et les ombres portées sur les plans de projection, les rayons lumineux étant à 45°.

21. Construire l'axe d'un cylindre de révolution, connaissant une génératrice, le rayon et sachant que le cylindre est tangent au plan horizontal.

22. Construire l'axe d'un cône de révolution, connaissant deux génératrices SA et SB et sachant que le cône est tangent à un plan horizontal. (On peut construire la génératrice de contact avec le plan horizontal par l'artifice suivant. Soit C un point de cette génératrice. Portons, sur les génératrices données, les longueurs SA = SB = SC. La droite AB rencontre le plan horizontal en un point P tel que $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}^2$. On en déduit la construction du point C par l'intersection d'un cercle de centre S avec un cercle de centre P.)

23. Construire une sphère passant par trois points donnés et tangente au plan horizontal. (Le point de contact se construit par un artifice analogue au précédent.)

24. Construire une sphère passant par deux points donnés A et B et tangente aux deux plans de projection. (Le point de contact avec chaque plan de projection se trouve sur un cercle ayant pour centre la trace de AB sur ce plan.)

25. On donne un cercle C dans le plan horizontal et un cercle C′ dans le plan vertical. Construire une sphère orthogonale à ces deux cercles. (Le centre se trouve sur la ligne de terre et dans le plan radical de deux sphères quelconques passant respectivement par les deux cercles donnés.)

26. On donne une sphère, de centre (0, 90, 90) et de rayon 90. Un cylindre a pour base, dans le plan horizontal, un cercle de rayon 75 et de centre (— 35, 75, 0). La génératrice issue du point de contact de la

base avec la ligne de terre passe par le point (0, 90, 135). Représenter la sphère entaillée par le cylindre.

27. Une sphère a pour rayon 32 et pour centre (— 100, 60, 100). Un cône de révolution, de sommet (— 35, 90, 125), a pour base un cercle de rayon 50 dans le plan horizontal. L'ensemble des deux solides est éclairé par des rayons lumineux de front, venant de gauche et inclinés à 45° sur xy. Représenter les deux solides avec leurs ombres propres, l'ombre portée par la sphère sur le cône et les ombres portées sur le plan horizontal.

28. Un cylindre a pour base, dans le plan horizontal, un cercle de centre (— 35, 90, 0) et de rayon 50. Ses génératrices ont pour paramètres directeurs (1, 0, 1). On considère le rayon de la base qui a pour angle polaire 120° et l'extrémité a de ce rayon. Sur la génératrice issue de ce point, on prend le point de cote 105 et l'on considère une sphère tangente en ce point au cylindre et tangente au plan horizontal. Représenter le solide commun.

29. On donne une sphère de centre (0, 100, 100) et de rayon 100 et une surface de vis à filet carré (t. II, n° 619) admettant pour axe le diamètre vertical de la sphère et dont le pas est égal à 70. Une génératrice de cet hélicoïde est la demi-droite de cosinus directeurs (1, 0, 0) issue du point le plus bas de la sphère. Représenter la sphère entaillée par l'hélicoïde.

CHAPITRE V.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On donne, dans le plan horizontal, un cercle de rayon* 12 *et de centre* (12, 80, 0) *et, dans le plan vertical, un autre cercle de même rayon et de centre* (18, 0, 20). *On considère la courbe de l'espace qui se projette suivant ces deux cercles. On la fait tourner autour de l'axe vertical qui a pour trace horizontale le point* $(0, 80 - 12\sqrt{3}, 0)$ (*fig* 16). *Construire ses contours apparents et ponctuer la courbe génératrice.*

La courbe génératrice G est une biquadratique, dont la projection horizontale est l'arc de cercle *dce*, limité par la ligne de rappel dd' tangente au cercle du plan vertical. De même, la projection verticale est l'arc de cercle $c'd'c''$.

La trace horizontale *o* de l'axe se trouve sur la tangente en *b* au cercle du plan horizontal et l'on a

$$bo = 12\sqrt{3} = ab\sqrt{3}.$$

Il en résulte que l'angle *oab* est égal à 60°; comme le point *r* est, d'après les données numériques, au milieu de *ab*, *oa* passe par *d*.

Commençons par construire les points remarquables de la méridienne principale.

Les points les plus hauts et les plus bas sont donnés par les parallèles des points (f, f'), (f, f''), (g, f'), (g, f''). Les traces de ces parallèles sur le plan de front F de l'axe sont respectivement les points $(5, 5')$, $(5, 9')$, $(3, 3')$, $(3, 11')$ et, bien entendu, leurs symétriques par rapport à $o'z'$. Cherchons les tangentes et les rayons de courbure en ces différents points.

La tangente en (f, f') à G coïncide avec la tangente au parallèle qui passe par ce point. On se trouve donc dans le cas d'exception de la détermination du plan tangent (t. II, n° 363). Pour trouver ce plan, appli-

quons le théorème de Meusnier à la courbe G. Le centre de courbure normale de la courbe considérée comme tracée sur le cylindre C qui la projette horizontalement est le centre (a, a') de la section droite de ce cylindre. Si l'on considère maintenant la courbe comme tracée sur le cylindre C′ qui la projette verticalement, son rayon de courbure normale est donné par la formule d'Euler (t. II, n° 339). La tangente à la section droite du cylindre est parallèle à la ligne de terre; elle fait un angle de 30° avec la tangente à G; on a donc

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos^2 30^\circ}{12} = \frac{3}{4 \times 12} = \frac{1}{16}.$$

Dès lors, le centre de courbure normale se projette verticalement en p', à 16^{mm} au-dessous de f'. L'axe de courbure de G, qui passe par les deux centres précédents, a pour projection verticale $a'\,p'$. Il rencontre l'axe de révolution au point n', qui est le centre de courbure normale de G sur la surface, puisque G est tangente au parallèle (t. II, n° 363). Il suit de là que la normale en $5'$ à la méridienne principale est $5'n'$; en menant une perpendiculaire, on a la tangente $5'\,t'$.

Le point $5'$ est à la fois le point le plus haut et le plus à droite de la méridienne principale; il en résulte que c'est nécessairement un *point de rebroussement* et le parallèle qu'il engendre est un parallèle de rebroussement [1].

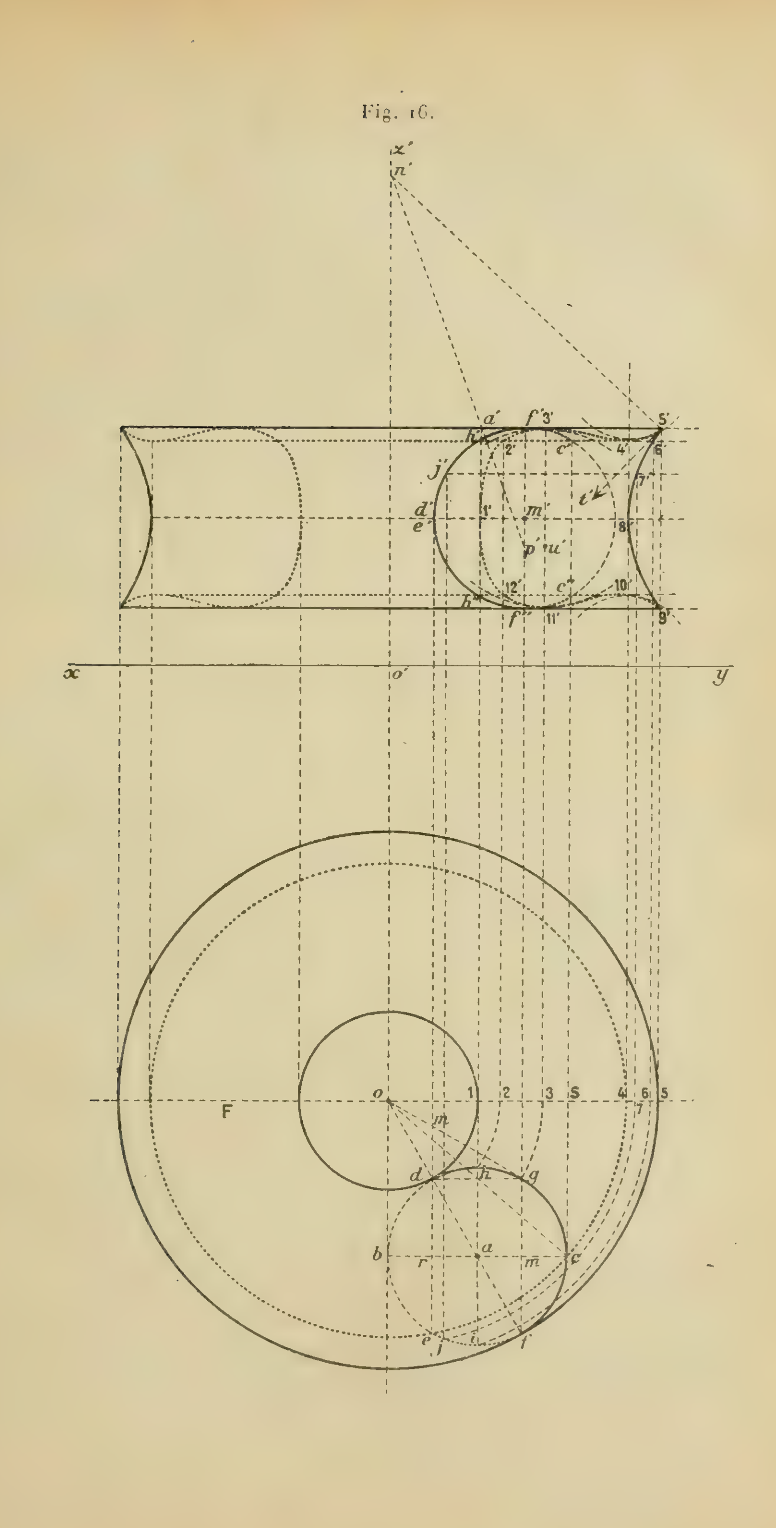
La tangente en $9'$ se déduit de la précédente par symétrie, car le plan horizontal passant par le centre m' du cercle vertical est un plan de symétrie pour G, donc pour la surface.

La tangente à G au point (g, f') est une horizontale projetée horizontalement en go; elle ne coïncide pas avec la tangente au parallèle; donc, le plan tangent en ce point est horizontal. Il en résulte que la tangente en $3'$ est parallèle à xy. Cherchons le centre de courbure.

A cet effet, nous allons chercher le rayon de courbure normale correspondant à la tangente go. Ce rayon est le même que le rayon de courbure normale de la courbe G considérée comme tracée sur le cylindre C′. Comme le plan de front ab est un plan de symétrie à la fois pour la courbe et pour ce cylindre, ce rayon de courbure est le même qu'au

(1) Tous les points de ce parallèle sont donc des points singuliers de la surface de révolution. On peut alors objecter que le théorème de Meusnier ne leur est plus applicable et mettre en doute la construction précédente de la tangente. En réalité, on peut admettre la validité de cette construction, en remarquant qu'elle est valable pour un point infiniment voisin.

Fig. 16.


x'
n'
a'
f'
3'
5'
h'
2'
c'
4'
6'
j'
7'
t'
d'
e'
m'
8'
p'
u'
12'
c'
10'
h'
f'
11'
9'
x
o'
y
o
1
2
3
S
4
6
5
F
m
d
h
g
a
b
r
m
c
e
j
i
f

point symétrique (f, f'), soit $f'p'$. Le centre de courbure u' de la méridienne principale au point 3′ a donc même cote que le point p'. On a tracé une partie du cercle de courbure et l'on a fait de même pour le point symétrique 11′.

Il y a, sur G, deux autres points à tangente horizontale : ce sont les points (c, c') et (c, c''), où la tangente est de bout, d'ailleurs distincte de la tangente au parallèle. Le plan tangent en chacun d'eux est horizontal; donc, les tangentes aux points 4′ et 10′ de la méridienne sont parallèles à xy. Cherchons le centre de courbure du point 4′. Le rayon de courbure est le deuxième rayon de courbure principale. Le premier est infini, car la normale en ce point est parallèle à l'axe et, par conséquent, le rencontre à l'infini. Dès lors, si R désigne le rayon cherché et si r désigne le rayon de courbure normale de G, on a, en vertu de la formule d'Euler et en observant que les tangentes à G et à la méridienne font entre elles un angle $\alpha = \widehat{cos} = \widehat{cob}$, dont la tangente est $\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\alpha}{R} = \frac{3}{7R};$$

donc, $R = \frac{3r}{7}$. Reste à trouver r. Sur C, le centre de courbure normale de G est (a, h'); sur C′, il est à l'infini sur la normale $c'm'$; l'axe de courbure de G est donc la parallèle à $c'm'$ menée par h'; il rencontre la normale à la surface de révolution en un point symétrique de c'' par rapport à c'. Donc, $r = c'c''$. Finalement, le rayon de courbure de la méridienne au point 4′ est égal aux $\frac{3}{7}$ de $c'c''$ et dirigé vers le haut. On a tracé la partie utile du cercle de courbure et l'on a fait de même pour 10′. Cherchons maintenant les points les plus à droite et les plus à gauche de la méridienne principale. Les parallèles maxima et minima sont engendrés par les points (f, f'), (f, f''), (d, d'), (e, e'). Les deux premiers redonnent les points 5′ et 9′. Les deux autres donnent respectivement 1′ et 8′. En chacun des points (d, d') et (e, e'), la tangente à G est verticale; il en est de même des tangentes à la méridienne. Le rayon de courbure normale pour C est infini, puisque c'est le rayon de courbure de la génératrice. Comme la surface de révolution est tangente en (d, d') à ce cylindre et, par suite, admet la même normale, elle admet aussi la même courbure normale; il résulte de là que la méridienne principale a un rayon de courbure infini au point 1′ [1].

---

(1) Comme ce point n'est pas à visible inflexion, le contact de la courbe avec sa tangente est au moins du troisième ordre (t. II, nº 219). Il serait facile, au moyen de la formule d'Euler, de calculer le rayon de courbure au point 8′.

Pour bien préciser la courbe, on a encore construit les points $2'$, $6'$ et $7'$, fournis respectivement par (h, h'), (i, h') et (j, j').

Jonction des points. — Partons d'un point quelconque de G. Suivons cette courbe et, chaque fois que nous rencontrons un point ayant donné un point de la méridienne principale, numérotons celui-ci. Observons d'ailleurs que, pour suivre la courbe G, il faut appliquer la méthode indiquée au n° 31 pour la jonction des points dans une intersection de cylindres, les deux cylindres étant ici C et C'.

Partons, par exemple, du point (d, d'), qui donne $(1, 1')$. Le sens de parcours en projection horizontale est imposé par le plan limite; en projection verticale, choisissons le sens des aiguilles d'une montre. Nous rencontrons (h, h'), d'où $(2, 2')$; (g, f'), d'où $(3, 3')$; (c, c'), d'où $(4, 4')$. Nous rebroussons alors chemin en projection verticale et nous rencontrons (f, f'), d'où $(5, 5')$; (i, h'), d'où $(6, 6')$; (j, j'), d'où $(7, 7')$; (e, e'), d'où $(4, 8')$. Nous rebroussons chemin en projection horizontale et nous rencontrons (f, f''), d'où $(5, 9')$; (c, c''), d'où $(4, 10')$. Nous rebroussons chemin en projection verticale et nous rencontrons (g, f''), d'où $(3, 11')$; (h, h''), d'où, $(2, 12')$; nous retombons enfin sur notre point de départ (d, d'), donc sur $(1, 1')$. Il ne reste plus qu'à joindre les points dans l'ordre des numéros.

Ponctuation. — En projection horizontale, la nappe engendrée par l'arc de méridienne $1'\,2'\,3'\,4'\,5'$ est seule vue. Les parallèles de contour apparent engendrés par $(1, 1')$ et $(5, 5')$ sont donc vus, tandis que le parallèle engendré par $(4, 8')$ est caché. Quant à la courbe G, elle n'a, sur la nappe ci-dessus, que l'arc $(dhcf, d'h'c'f')$, puisque c'est cet arc qui donne naissance à l'arc $1'2'3'4'5'$ de la méridienne. On en conclut que l'arc dhf doit être tracé en trait plein et l'arc fe en pointillé.

En projection verticale, la seule nappe vue est engendrée par $5'8'9'$. Cet arc et son symétrique sont donc les seuls à tracer en trait plein. Nous avons maintenant, pour compléter le contour apparent, les parallèles engendrés par les points $(5, 5')$, $(5, 9')$, $(4, 4')$, $(4, 10')$. Les deux premiers seuls sont vus. Quant à la courbe G, elle a sur la nappe vue l'arc $(fef, f'e'f'')$. L'arc $f'e'f''$ de sa projection verticale est donc seul à tracer en trait plein.

2. *Ombre d'un tore à axe vertical, éclairé par des rayons lumineux à 45° (fig. 17).*

Le contour apparent horizontal du tore se compose de ses deux parallèles maximum et minimum. Le contour apparent vertical se compose

des deux cercles méridiens de front et des deux parallèles le plus haut et le plus bas.

Il s'agit maintenant de construire la courbe d'ombre propre, c'est-à-dire la courbe de contact du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à la direction $(ol, o'l')$. Commençons par construire ses points remarquables.

Points sur les contours apparents. — Sur le contour apparent horizontal, nous avons les points $(5, 5')$, $(13, 13')$, $(22, 22')$, $(30, 30')$, dont les projections horizontales sont les points de contact des tangentes aux deux cercles de contour apparent parallèles à la projection horizontale des rayons lumineux.

Sur le contour apparent vertical, nous avons les points $(3, 3')$, $(24, 24')$, $(32, 32')$, $(11, 11')$, dont les projections verticales sont les points de contact des tangentes aux cercles méridiens de front parallèles à $o'l'$. Sur les parallèles le plus haut et le plus bas, il n'y a évidemment pas de points de la courbe, puisqu'en chaque point de ces parallèles, le plan tangent est horizontal et ne saurait être, par conséquent, parallèle à $(ol, o'l')$.

Parallèles limites. — Ce sont ceux qui passent par les points de contact des rayons lumineux tangents à la section du tore par le plan méridien de symétrie ol. Pour avoir ces points, faisons une rotation amenant ce plan à être de front. La nouvelle direction des rayons lumineux est $(ol_1, o'l'_1)$. Nous menons des tangentes aux méridiens de front parallèlement à cette direction ; les points de contact pour le cercle a', par exemple, sont les extrémités c'_1 et d'_1 du diamètre perpendiculaire à $o'l'_1$. Les parallèles passant par ces deux points sont les parallèles limites. Si l'on fait la rotation inverse de la rotation précédente, les points (c_1, c'_1) et (d_1, d'_1) viennent en $(1, 1')$ et $(26, 26')$. On a, de même, les points $(9, 9')$ et $(18, 18')$, au moyen de l'autre cercle méridien ou, plus simplement, en prenant les symétriques des points précédents par rapport au centre (o, o') du tore, qui est évidemment un centre de symétrie pour la courbe.

Nous avons maintenant tous les points remarquables. Comme la courbe à tracer est de forme très compliquée, il est nécessaire d'en chercher d'autres points. Nous pouvons d'abord prendre les symétriques des points sur le contour apparent vertical par rapport au plan méridien de symétrie ol. Nous obtenons ainsi les points situés dans le plan méridien de profil : $(7, 7')$, $(15, 15')$, $(20, 20')$, $(28, 28')$.

Cherchons maintenant les points situés dans le plan horizontal H'. Construisons d'abord les points situés sur le parallèle qui passe par (s, s'). Le cône circonscrit le long de ce parallèle a pour sommet (o, σ'). Par ce

point, nous menons la parallèle aux rayons lumineux et nous prenons la trace (u, u') de cette droite sur H'. De ce point, nous menons les tangentes au parallèle considéré. Les points de contact (21, 21') et (31, 31') sont les points cherchés.

Nous avons maintenant, dans le plan H', un second parallèle, qui passe par (t, t'). Le cône circonscrit qui l'admet comme cercle de contact est évidemment parallèle au précédent. Donc, les génératrices de contact des plans tangents à ce cône parallèles aux rayons lumineux sont parallèles aux génératrices analogues du cône précédent. En outre, si on les oriente du sommet vers la base, elles ont des orientations opposées sur les deux cônes. Si l'on remarque enfin que la projection horizontale commune des deux sommets est o, on déduit du point (21, 21') le point (14, 14') et du point (31, 31') le point (4, 4').

Une symétrie par rapport au centre du tore nous donne ensuite les points (29, 29'), (6, 6'), (23, 23'), (12, 12').

Cherchons enfin les points situés dans le plan méridien MN. Par (l, l'), menons une parallèle aux rayons lumineux et une perpendiculaire à MN; elles percent respectivement MN au point (o, o') et en un point projeté horizontalement en v et ayant même cote que l'. Il faut maintenant mener aux cercles méridiens du plan MN des tangentes parallèles à la droite joignant ces deux points, ce qui se fait au moyen d'une rotation amenant MN à être de front. Le point (o, o') ne bouge pas; v vient en v_1, qui se rappelle en v'_1, sur $l'l'_1$. Nous menons alors les diamètres des cercles méridiens de front perpendiculaires à $o'v'_1$ et nous faisons faire à leurs extrémités la rotation inverse de la précédente. Le point (ϖ_1, ϖ'_1), par exemple, nous donne, de la sorte, le point (2, 2') et l'on construit de même (25, 25'), (33, 33'), (10, 10').

Une symétrie par rapport au plan vertical ol nous donne ensuite les points (16, 16'), (27, 27'), (19, 19'), (8, 8').

Nous avons maintenant suffisamment de points pour tracer la courbe avec une exactitude convenable. Toutefois, nous allons encore construire, à titre d'exemple, les tangentes aux points 5', 13', 22', 30' de la projection verticale, en appliquant le théorème de Dupin (n° 58).

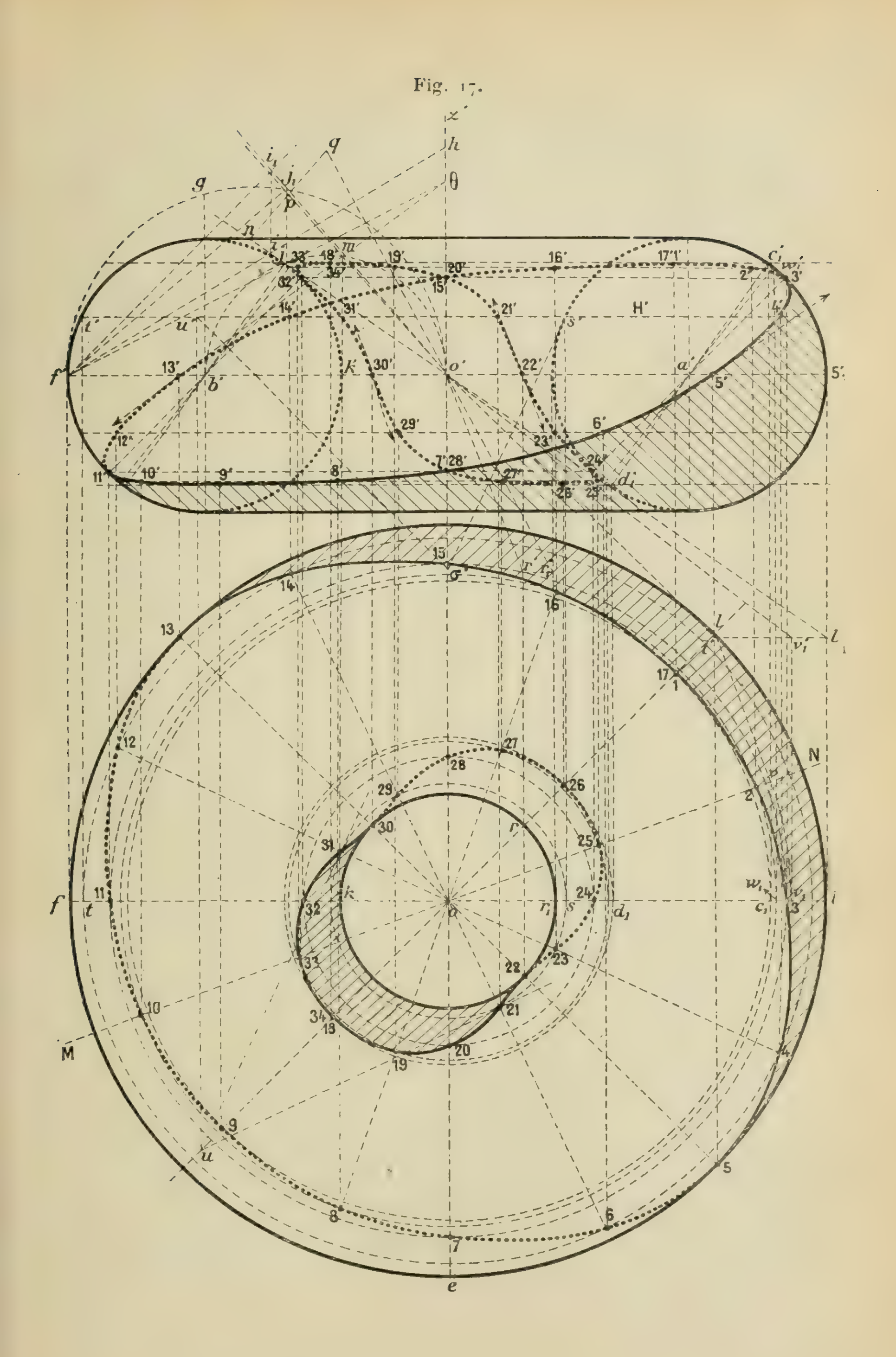
Commençons par le point (5, 5'). La tangente en ce point est le diamètre conjugué de la direction des rayons lumineux par rapport à l'indicatrice d'Euler. Pour faire la construction, amenons le point considéré en (e, o'), par une rotation, afin que le plan tangent soit de front et que les figures que nous devons y tracer se projettent verticalement en vraie grandeur. Les rayons de courbure principaux sont $f'o'$ et $f'b'$; ils sont de même sens; donc, l'indicatrice est une ellipse. Prenons comme unité de longueur $f'o'$: nous avons le demi-grand axe de cette ellipse. Le demi-

petit axe a pour longueur $\sqrt{f'b'}$ ou, en rendant homogène (t. II, nº 3), $\sqrt{f'b'.f'o'}$. On construit cette longueur par une moyenne proportionnelle, soit $f'g$, que nous reportons ensuite en $o'h$. Dans la position actuelle, la direction des rayons lumineux a pour projection verticale $o'l'_1$. Nous construisons son diamètre conjugué par rapport à l'ellipse dont les demi-axes sont $o'f'$ et $o'h$. Cette construction se fait au moyen du cercle principal (t. II, nº 539). On construit le rabattement $o'i_1$ de $l'_1o'i$, en se servant du point i de $f'h$, qui se rabat sur la droite à 45° menée par f'. Puis, on abaisse la perpendiculaire $f'j_1$ sur $o'i_1$; on la relève en $f'j9$ et l'on fait enfin la rotation qui ramène la figure en place. Le point f' vient en 13′, de sorte que 913′ est précisément la tangente en 13′, la tangente en 5′ lui étant parallèle.

Pour construire la tangente au point (22, 22′), nous procédons d'une manière analogue. Cette fois, les rayons de courbure principaux sont $k'o'$ et $k'b'$. Ils sont de sens contraires; donc, l'indicatrice est une hyperbole. Si l'on prend $k'o'$ pour unité de longueur et pour demi-axe transverse, la valeur absolue de l'axe non transverse est moyenne proportionnelle entre $k'o'$ et $k'b'$, soit $k'm$. Les asymptotes de l'hyperbole sont donc $o'm$ et la droite symétrique par rapport à $o'z'$. Construisons la droite $o'q$ conjuguée harmonique de $l'_1o'n$ par rapport à ces deux asymptotes (en portant $np = pq$ parallèlement à la seconde asymptote; t. II, nº 132); nous obtenons la direction de la tangente cherchée. Il ne reste plus maintenant qu'à faire la rotation ramenant la figure en place, au moyen du point (r_1, r'_1), par exemple, qui vient en (r, r'). Finalement, les tangentes en 22′ et 30′ sont parallèles à $o'r'$.

Jonction des points. — Partons d'un point d'un parallèle limite, par exemple du point (1, 1′). Imaginons qu'on balaie le tore d'une manière continue par un parallèle variable et numérotons les points rencontrés, en ne prenant chaque fois qu'un seul point, choisi de manière que le méridien qui le contient tourne toujours dans le même sens, par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre en projection horizontale. Nous rencontrons ainsi successivement les points 1, 2, ..., 15, 16 et le point 17 se confond avec le point de départ. Nous avons donc obtenu une courbe fermée. Mais, il nous reste encore des points non numérotés, qui sont sur les parallèles de rayon inférieur à $o'a'$. Partons du point 18 et procédons comme précédemment (on a tourné cette fois dans le sens inverse en projection horizontale). Nous rencontrons successivement les points 18, 19, ..., 32, 33 et le point 34 coïncide avec le point de départ. Nous avons maintenant épuisé tous les points et la ligne d'ombre se compose finalement de deux courbes fermées, situées respectivement sur la nappe extérieure et sur la nappe intérieure du tore.

Fig. 17.



Ponctuation. — En projection horizontale, les points vus sont ceux qui sont au-dessus du plan de l'équateur, c'est-à-dire dont la projection verticale est au-dessus de $f'o'$. On en déduit immédiatement que les arcs vus sont 13 1 5 et 22 18 30.

En projection verticale, les points vus sont ceux qui se trouvent à la fois sur la nappe extérieure du tore et en avant du plan méridien de front. On en conclut d'abord que la plus petite des deux courbes est cachée, puisqu'elle est sur la nappe intérieure. Quant à la grande, ceux de ses points qui sont vus ont leur projection horizontale en avant de fol_1; ils constituent l'arc $3'4'\ldots 11'$.

Hachures. — Prenons, par exemple, le point $(l, 5')$. Si on le fait tourner, en même temps que les rayons lumineux, pour l'amener en $(l_1, 5'_1)$, on reconnaît tout de suite qu'il est dans l'ombre, car le rayon lumineux qui passerait par ce point rencontre auparavant le tore. Toute la région qui comprend ce point et qui est limitée à la courbe d'ombre propre est donc dans l'ombre. Pour bien se représenter cette région, il est commode d'imaginer un demi-plan méridien variable qui balaie le tore, en partant, par exemple, du demi-plan ol. On obtient, dans chaque position, un cercle méridien, dont un arc est éclairé et l'autre dans l'ombre; ces deux arcs sont séparés par les points de rencontre du demi-plan considéré avec la courbe d'ombre propre; on les distingue aisément, en suivant simplement la projection horizontale de cette dernière courbe et se rappelant, au départ, que l'arc 1 l 26 est dans l'ombre. On voit ainsi qu'en projection horizontale, il faut mettre des hachures entre 13 1 5 et le grand cercle de l'équateur et entre 22 18 30 et le petit cercle de l'équateur. Si l'on regardait le tore par le dessous, on ne verrait, au contraire, de la lumière qu'entre 30 26 22 et le petit cercle de l'équateur et entre 5 9 13 et le grand cercle de l'équateur. Mais, au point de vue des hachures de la projection horizontale, cela ne nous intéresse pas.

En projection verticale, il faut mettre des hachures dans toute la région qui est au-dessous de l'arc $3'4'\ldots 11'$.

3. *On considère un paraboloïde de révolution à axe vertical. On le coupe par le plan horizontal a b' et par le plan de front ab et l'on conserve la portion de surface qui est au-dessous du premier plan et en arrière du deuxième. Un disque circulaire se trouve dans le plan horizontal a' b et a pour centre le point* (O, O') *tel que* $aO = ao$. *Le tout est éclairé par des rayons lumineux à 45°. Les surfaces étant supposées infiniment minces et opaques, on demande de les représenter en figurant les ombres* (*fig.* 18).

Les régions non éclairées du paraboloïde sont limitées, d'une part, par les ombres portées par le bord parabolique et par le bord demi-circulaire, d'autre part par l'ombre portée par le disque circulaire. Il n'y a pas à s'occuper de la courbe d'ombre propre, qui n'est séparatrice que pour la surface extérieure et non pour la surface intérieure ([1]), qui est la seule vue dans l'épure actuelle.

Ombre portée par le bord parabolique. — Elle est limitée par la courbe d'intersection du paraboloïde avec le cylindre parallèle aux rayons lumineux et s'appuyant sur l'arc de parabole (aob, $a'o'b'$). Les deux surfaces étant du second degré et ayant une première conique commune, le reste de leur intersection est une autre conique, qui coupe la première aux deux points de contact des deux quadriques (t. II, n° 491, IV). L'un de ces deux points est le point à l'infini sur la verticale; l'autre est le point (d, d') de la méridienne principale où la tangente est à 45°. Il s'ensuit que la conique cherchée est une parabole à axe vertical et passant par le point (d, d'). Il nous suffit d'en chercher un nouveau point pour que son plan soit déterminé. Construisons, par exemple, le point qui se trouve sur la génératrice du cylindre issue du point (a, a'). Nous appliquons la méthode générale du n° 64, c'est-à-dire que nous coupons par le plan projetant verticalement cette droite. La conique de section se projette horizontalement suivant un cercle, dont le centre est la trace horizontale du diamètre conjugué du plan sécant par rapport au paraboloïde. Or, ce diamètre n'est autre que la verticale (d, $d'i'$). Donc, le centre du cercle est d. Comme (a, a') est déjà l'un des points d'intersection, ce cercle passe par a. Il rencontre la droite à 45° menée par a au point i, situé sur la ligne de rappel de d. Donc, le point cherché est (i, i'). Il suit de là que le plan de notre parabole est le plan de profil passant par d.

L'arc (ad, $a'd'$) de la méridienne principale est le seul qui soit rencontré en premir lieu par les rayons lumineux, comme on le voit aisément sur la projection horizontale. Donc, l'ombre que porte cette méridienne sur l'intérieur du paraboloïde se réduit à l'arc de parabole projeté suivant les deux segments de droites (di, $d'i'$).

Ombre portée par le bord demi-circulaire. — En raisonnant comme

---

([1]) D'une manière générale, si l'on considère un fragment de surface *convexe* éclairé par une source lumineuse extérieure, les régions infiniment voisines de la courbe d'ombre propre, prises du côté interne de la surface, ne sont pas éclairées, car le rayon lumineux passant par un point d'une telle région est arrêté soit par le point lui-même pris du côté externe, soit par un point infiniment voisin, se trouvant, par rapport au premier, du côté d'où vient la lumière.

tout à l'heure, on voit que cette ombre est limitée par une conique, rencontrant le cercle aux deux points de ce dernier où le plan tangent est parallèle aux rayons lumineux. On pourrait construire ces deux points par la méthode générale du cône circonscrit (n° 56). On peut aussi procéder comme il suit.

Faisons une rotation autour de l'axe du paraboloïde amenant le rayon (oe, $\sigma'e'$) à être de front, en (oe_1, $\sigma'e'_1$). Le plan diamétral conjugué des rayons lumineux est alors un plan de profil passant par le milieu g'_1 de la corde $a'f'_1$ parallèle à $\sigma'e'_1$. Ce plan coupe le plan horizontal $a'b'$ suivant une droite de bout projetée verticalement au point h'_1. Faisons maintenant la rotation inverse; cette droite de bout devient une horizontale projetée horizontalement en jhk. Les points j et k sont les points cherchés. Le premier appartient seul au demi-cercle non enlevé; c'est pourquoi on l'a seul rappelé verticalement en j'.

Menons maintenant $a'f'_1$ parallèle à $\sigma'e'_1$. Le point (f_1, f'_1) est, après la rotation, le point le plus bas de notre conique. La rotation inverse l'amène en (f, f'). La projection horizontale de la conique est, dès lors, le cercle jfk.

On peut obtenir ce cercle d'une autre manière. Observons d'abord que la conique passe par le point déjà construit (i, i'). Considérons maintenant le rayon lumineux qui passe par le point (l, l'). Comme ce point appartient à l'ombre portée par la méridienne principale, le rayon considéré perce le paraboloïde en un point de cette méridienne, dont on a immédiatement la projection horizontale en m. Le rayon issu du point l_1 donnerait un point analogue, qui est évidemment symétrique de m par rapport à d. On en conclut que le cercle jfk a son centre sur id; comme il passe par i et m, il est entièrement déterminé [1].

L'arc ij est seul utile, car il correspond à l'arc aj, qui seul est rencontré le premier par les rayons lumineux.

La projection verticale de cet arc ij est un arc d'ellipse $i'j'$. Il ne serait pas difficile de construire deux diamètres conjugués de cette ellipse, car on connaît un point à tangente horizontale f'; on construirait l'autre de la même manière que le premier et l'on aurait le diamètre conjugué des cordes horizontales. Quant au diamètre horizontal, sa projection horizontale est la parallèle à jk menée par ω; sa projection verticale passe par le milieu du diamètre déterminé précédemment; on construirait ses extrémités en coupant par un plan horizontal. Mais, pratiquement, toutes ces constructions sont inutiles, étant donnée la petitesse de l'arc

---

(1) Des propriétés qui viennent d'être mises en évidence, on peut conclure que ce cercle est symétrique du cercle ajb par rapport à jk.

utile $i'j'$. Bornons-nous simplement à chercher les tangentes aux extrémités de cet arc.

La tangente en i' est $a'i'$, car cette droite est contour apparent vertical du cylindre dont nous prenons l'intersection avec le paraboloïde.

Pour la tangente en j', appliquons la méthode des normales. La normale au paraboloïde passe par le point (o, p'), obtenu en portant la sous-normale $q'p'$ égale, comme on sait (t. II, n° 543), au paramètre $d'\delta$ de la parabole méridienne. La normale au cylindre de révolution qui projette horizontalement l'ellipse est l'horizontale $(jn, j'n')$. La droite $(on, p'n')$ est une frontale du plan des normales; donc, la tangente cherchée est perpendiculaire à $p'n'$.

Ombre portée par le disque circulaire. — Il s'agit de construire l'intersection du cylindre parallèle aux rayons lumineux ayant pour base ce disque avec le paraboloïde.

Commençons par chercher les points remarquables.

Observons d'abord que le plan méridien oO est un plan de symétrie pour chacune des deux surfaces, donc pour leur intersection. En projection horizontale oO est un axe de symétrie. On peut aisément construire ses sommets. Il suffit, pour cela, de chercher les points de rencontre du paraboloïde avec les deux génératrices issues des points (A, A') et (B, B'). Pour la première, par exemple, la section par le plan de bout $A'\alpha'$ se projette horizontalement suivant le cercle de centre d et de rayon $d\alpha$; ce cercle rencontre Ao en deux points, dont un seul est utile, à savoir le point 1, qui se rappelle en $1'$, sur $A'\alpha'$. On construit de même le point $(7, 7')$. Dans l'espace, les tangentes en ces points sont perpendiculaires au plan de symétrie. En projection horizontale, elles sont perpendiculaires à Oo; en projection verticale, elles sont horizontales.

Cherchons maintenant les points sur le contour apparent horizontal du cylindre. Les génératrices qui constituent ce contour apparent ont même projection verticale que les génératrices précédemment considérées; donc, nous utilisons les mêmes plans auxiliaires. Le cercle 7β, par exemple, rencontre la génératrice issue de D au point 4, qui se rappelle en $4'$. On a le point $(10, 10')$ par symétrie par rapport au plan méridien Oo. La tangente en 4 est D4. Pour avoir la tangente en $4'$, appliquons encore la méthode des normales. La normale au cylindre est l'horizontale $(4x, 4'x')$; la normale au paraboloïde passe par le point ε' tel que $\gamma'\varepsilon' = d'\delta$. Une frontale du plan normal a pour projection verticale $\varepsilon'x'$: la tangente en $4'$ lui est perpendiculaire. Le point $(10, 10')$ n'appartenant pas à la partie utile de la courbe, on n'a pas construit sa tangente.

Cherchons maintenant les points sur le contour apparent vertical du cylindre. Pour la génératrice issue de (F, F′), par exemple, nous coupons par le plan de bout $F'\varphi'$ et nous obtenons, en projection horizontale, le cercle de centre d et de rayon $d\varphi$; ce cercle rencontre FH au seul point utile 6, qui se rappelle en 6′. La tangente en 6′ est F′6′; la tangente en 6 est la tangente au cercle φ6, car le plan auxiliaire $F'\varphi'$ est surface limite pour le cylindre; son intersection avec le paraboloïde est donc tangente à l'intersection du cylindre et du paraboloïde (n° 7).

On peut construire de même le point (11, 11′).

Cherchons encore les points situés sur les génératrices issues des points H et G. On utilise le plan auxiliaire déjà considéré $a'c'$ et le cercle de centre d et de rayon dc donne les points 3 et 9, qui se rappellent en 3′ et 9′. Il est à remarquer que ces points sont les symétriques de (11, 11′) et de (6, 6′); on aurait donc pu les déduire de ces derniers ou *vice versa*.

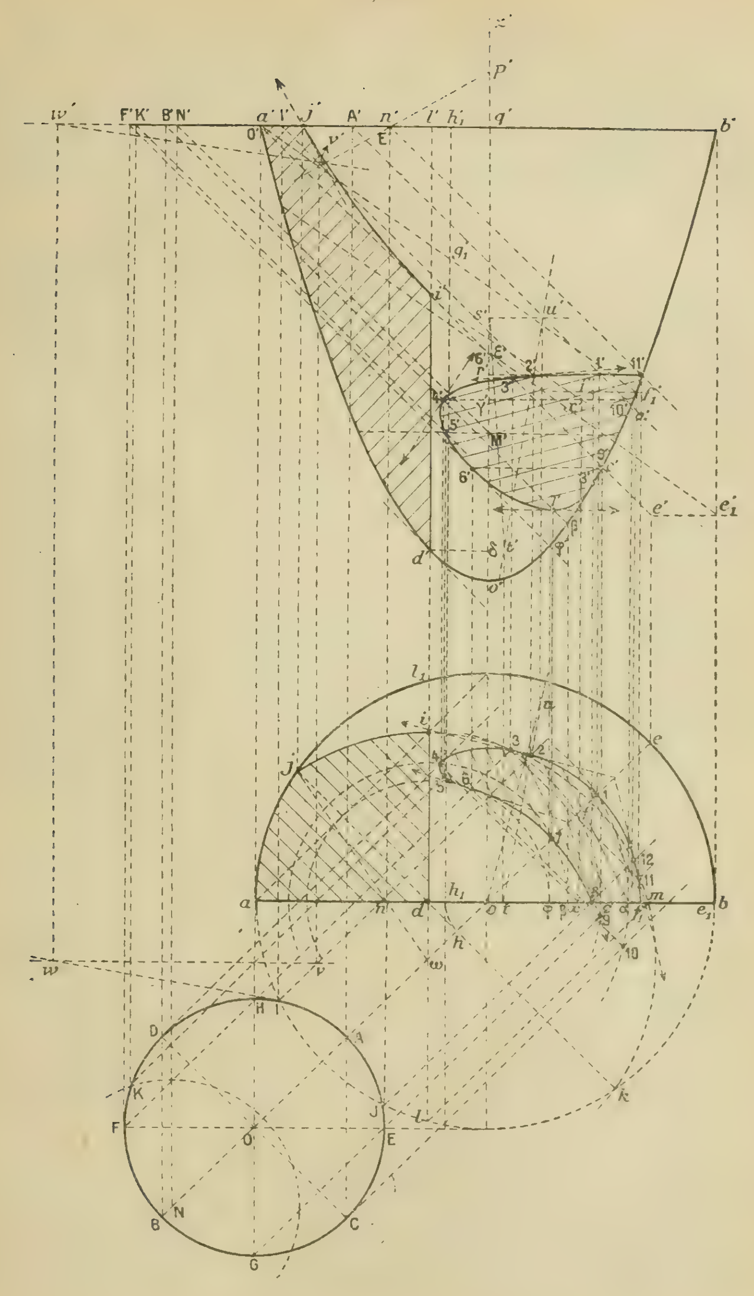
Nous avons encore construit les points (2, 2′) et (12, 12′) situés sur les génératrices issues des points I et J où la circonférence du disque rencontre le parallèle supérieur du paraboloïde. En projection horizontale, les points 2 et 12 se trouvent sur le cercle jfk; ils se rappellent sur les projections verticales des génératrices.

Comme exemple de construction de la tangente en un point quelconque, construisons la tangente en (2, 2′). Nous employons toujours la méthode des normales. La normale au paraboloïde rencontre l'axe en s' tel que $r's' = d'\delta$. La normale au cylindre a une projection horizontale $2t$ perpendiculaire à l'horizontale Iw du plan tangent. Pour construire sa projection verticale, nous déterminons une frontale (vw, $v'w'$) de ce plan et nous menons $2'u'$ perpendiculaire à $v'w'$. Il nous reste à mener maintenant, par (2, 2′), la perpendiculaire au plan des deux normales. En projection verticale, nous menons la perpendiculaire à la frontale $s't'$ et, en projection horizontale, nous menons la perpendiculaire à l'horizontale ou.

Construisons enfin un point quelconque par la méthode générale du n° 65. Nous coupons par le cylindre ayant pour base le parallèle de centre (o, M′). La base de ce cylindre dans le plan du disque est un cercle égal au parallèle et ayant pour centre (N, N′). Elle coupe la circonférence du disque au point (K, K′), par exemple. La génératrice issue de ce point rencontre le parallèle en (5, 5′), d'abord construit en projection verticale.

Nous avons maintenant assez d'éléments pour construire les deux projections de l'ombre portée par le disque. La jonction des points ne présente aucune difficulté; il suffit de suivre la circonférence du disque,

Fig. 18



en numérotant les ombres portées par les points successifs A, I, II, ..., J, A. En projection horizontale, la courbe doit être arrêtée à *ab*. Les points d'arrêt se rappellent sur la méridienne principale.

Ponctuation et hachures. — Tout est vu dans les deux projections. Quant aux hachures, il faut en mettre à l'intérieur de l'ombre portée par le disque et à l'intérieur du quadrilatère curviligne ($adij$, $a'd'i'j'$).

4. *Dans le plan de front ao, on donne un segment hyperbolique, limité par la corde* H′G′. *En tournant autour de son axe a′o′, il engendre un segment d'hyperboloïde à deux nappes. Un cylindre de révolution a pour axe* (oQ, $o'Q'$) *et passe par le milieu* (i, i') *de la corde* H′G′. *Représenter le solide commun* (*fig.* 19).

Nous allons tout de suite construire l'intersection des deux surfaces par la méthode générale du n° 66, c'est-à-dire en coupant par des sphères de centre (o, o'). Commençons, comme d'habitude, par chercher les points remarquables.

Nous avons une *sphère limite*, qui a pour rayon le rayon du cylindre. Elle est inscrite dans le cylindre le long du parallèle CD et coupe l'hyperboloïde suivant le parallèle AB. Les projections verticales de ces deux parallèles se rencontrent en 3′. Pour avoir la projection horizontale des points correspondants, nous coupons la sphère par le plan horizontal qui passe par 3′ et nous obtenons un cercle de rayon EF, qui se projette horizontalement en vraie grandeur, suivant un cercle de centre o. Ce cercle rencontre la ligne de rappel de 3′ en 3 et 7, qui sont les points cherchés.

La tangente au point (3, 3′), par exemple, est la tangente au parallèle AB, d'après le théorème des surfaces limites (n° 7). En projection verticale, c'est donc la droite AB. Pour avoir la projection horizontale, nous construisons l'intersection du plan de bout AB avec le plan tangent à la sphère en (3, 3′). A cet effet, coupons par le plan horizontal $s't'$. Il coupe le plan AB suivant la droite de bout $t't$. Il coupe la frontale ($3s$, $3's'$) du plan tangent à la sphère ($3's'$ est perpendiculaire à $o'3'$) au point (s, s'); par ce point, nous menons st perpendiculaire à $o3$ et nous avons l'intersection du plan auxiliaire avec le plan tangent à la sphère. Cette droite rencontre la droite de bout précédente au point t qui, joint à 3, donne la tangente cherchée.

Les méridiennes principales se rencontrent en un seul point utile : le point (5, 5′). La tangente en 5 est perpendiculaire à la ligne de terre. La tangente en 5′ s'obtient par la méthode habituelle des normales (n° 67). Les points de rencontre des normales aux deux

surfaces avec leurs axes respectifs sont p' et q'; la tangente en $5'$ est perpendiculaire à $p'q'$.

La droite $p'q'$ est l'axe de courbure de la courbe de l'espace; elle rencontre la normale au cylindre projetant horizontalement la courbe au centre de courbure (r, r') de la section droite de ce cylindre; de sorte que r est le centre de courbure de la projection horizontale au point 5 (n° 67). On a tracé la partie du cercle de courbure qui avoisine 5.

Cherchons maintenant *les points situés sur le parallèle* H'G', qui limite le segment d'hyperboloïde. Il suffit d'appliquer la méthode générale, en prenant la sphère auxiliaire qui contient ce parallèle. On obtient le parallèle IJ sur le cylindre, qui rencontre H'G' au point $1'$, pratiquement situé sur la ligne de rappel de o'. En coupant la sphère par un plan horizontal, on obtient un cercle dont on reporte le rayon $1'V$, de part et d'autre de o, sur la ligne de rappel de ce point. On a ainsi les projections horizontales 1 et 9 des points cherchés.

Construisons la tangente en (1, $1'$). La normale au cylindre est ($1u$, $1'u'$); la normale à l'hyperboloïde est ($1v$, $1'v'$), le point v' ayant été construit au moyen de la normale en H' à l'hyperbole méridienne. En projection verticale, la tangente en $1'$ est perpendiculaire à $u'v'$. Pour la projection horizontale, nous déterminons une horizontale (cw, $c'w'$) du plan normal, en coupant par le plan horizontal du point (c, c'). [On n'a pas coupé par le plan horizontal du point (1, $1'$), comme il a été indiqué au n° 66, parce que cela aurait donné une construction en dehors des limites de l'épure.] La tangente en 1 est perpendiculaire à cw. La tangente en 9 s'en déduit par symétrie par rapport à oa.

Nous avons maintenant trois points et leurs tangentes en projection verticale; comme celle-ci est une conique (n° 68), elle est plus que déterminée. Nous allons néanmoins chercher ses directions asymptotiques et, s'il y a lieu, ses asymptotes.

Pour avoir les directions asymptotiques, circonscrivons à la sphère limite de tout à l'heure un cône parallèle au cône asymptote de l'hyperboloïde. A cet effet, il suffit de mener au contour apparent de la sphère des tangentes $h'l'$ et $g'm'$ respectivement parallèles aux asymptotes $a'c'$ et $a'b'$. Les directions asymptotiques cherchées sont les diagonales $h'g'$ et $l'm'$.

Pour avoir l'asymptote parallèle à $g'h'$, par exemple, nous prenons les diamètres conjugués de cette direction par rapport aux deux méridiennes principales. Pour le cylindre, nous avons l'axe. Pour l'hyperboloïde, nous avons la droite $a'j'$, qui passe par le milieu du segment déterminé par $a'b'$ et $a'c'$ sur $g'h'$. Ces deux droites se rencontrent en k'. Par ce

point, nous menons la parallèle à $g'h'$ et nous avons la première asymptote. La deuxième se construit d'une manière analogue.

Nous pouvons maintenant construire, à la manière habituelle (n° 141), l'arc d'hyperbole $1'5'$.

Nous pouvons ensuite en déduire les points sur les contours apparents horizontaux, qui seraient difficiles à déterminer directement.

Les génératrices de contour apparent horizontal du cylindre ont même projection verticale que l'axe. Cette projection ne rencontre pas l'arc d'hyperbole précédemment tracé; donc, il n'y a pas de points sur le contour apparent horizontal du cylindre.

Le contour apparent horizontal de l'hyperboloïde est une hyperbole, dont le plan, diamétral conjugué des cordes verticales, est un plan de bout, ayant pour trace verticale la droite $a'd'$, conjuguée harmonique des cordes verticales par rapport aux asymptotes $a'b'$ et $a'c'$.

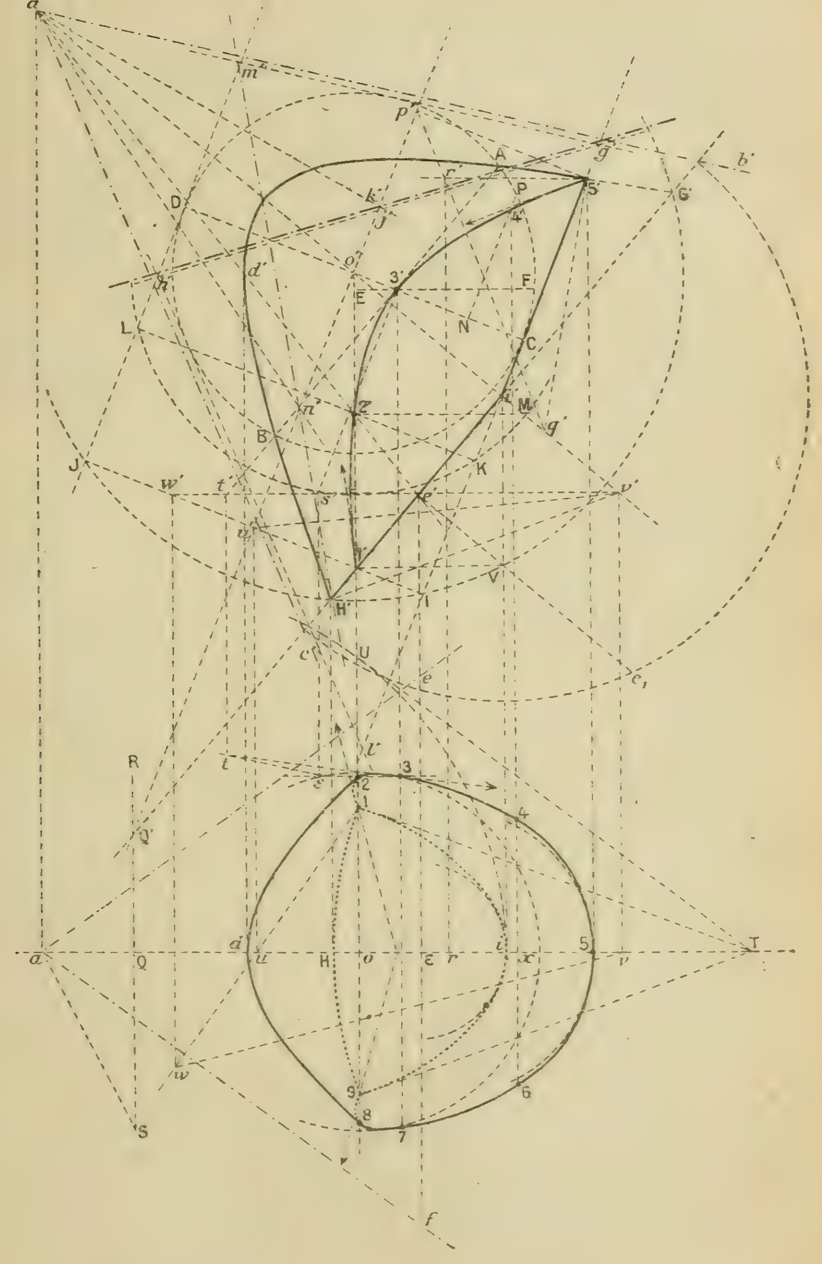
Cette droite rencontre l'arc d'hyperbole $1'5'$ au point $2'$, pratiquement et fortuitement situé sur la ligne de rappel de o'. Pour avoir la projection horizontale des points correspondants, nous considérons le parallèle LK du cylindre, dont la projection verticale passe par $2'$, et la sphère auxiliaire qui contient ce parallèle. Nous coupons cette sphère par le plan horizontal du point $2'$ et il ne nous reste plus qu'à porter la longueur $2'M$, sur la ligne de rappel, de part et d'autre de o; nous obtenons ainsi les points 2 et 8.

Les tangentes en ces points sont celles de l'hyperbole de contour apparent (n° 2). On les a construites (elles n'ont pas été reportées sur la figure) au moyen des asymptotes de cette dernière courbe. Quant à ces asymptotes, elles sont l'intersection du cône asymptote avec le plan de bout $a'd'$. La trace de ce plan sur le plan de bout $H'G'$, pris pour plan de base du cône, est une droite de bout, de trace verticale e'. En rabattant le plan de base autour du diamètre de front, on a, en e_1, le rabattement de la trace d'une des génératrices cherchées. En portant $\varepsilon e = \varepsilon f = e'e_1$ et joignant ae et af, on a les asymptotes du contour apparent horizontal de l'hyperboloïde.

Pour préciser la forme de la courbe en projection horizontale, on a encore construit les points 4 et 6, en partant de leur projection verticale commune $4'$. On a déterminé les éloignements $x4$ et $x6$, en considérant la section droite du cylindre, supposée rabattue autour du diamètre de front CD. La distance NP donne les éloignements en question.

On peut maintenant tracer avec exactitude la courbe 1, 2, 3, ..., 8, 9. La jonction des points ne présente aucune difficulté, si l'on s'aide de la projection verticale.

Fig. 19.



a'
m'
p'
g
b'
A
P
5'
G
D
k
J
4'
o'
d'
3'
E
F
h
L
N
C
M
n'
2'
g'
B
J
K
w'
t'
s'
e'
v'
u'
V
H'
I
c'
U
e
e1
l'
R
t
2
3
1
4
Q'
d
a
Q
u
H
o
ε
r
i
x
5
v
T
w
9
6
8
7
S
f

On a ensuite construit l'arc 2 d8 de l'hyperbole de contour apparent horizontal, au moyen des asymptotes précédemment déterminées et du point d.

Il reste enfin à construire la section du solide commun par le plan de bout H'G'. La projection verticale est le segment i'H'. En projection horizontale, on a deux arcs d'ellipses.

Le premier 1 i 9 provient de la section du cylindre. Il a pour centre le point Q et pour petit axe RS égal au diamètre du cylindre. On a construit les tangentes 1 T et 9 T, au moyen du cercle homographique (t. II, n° 539). On a construit également le cercle de courbure en i, au moyen de la formule $R = \frac{b^2}{a}$ (t. II, n° 532).

Le deuxième arc d'ellipse 1 H 9 provient du parallèle de l'hyperboloïde. Il a pour centre i et un grand axe égal à H'G'. On a construit le cercle de courbure en H et l'on a constaté qu'il passait pratiquement par 1 et 9. Il peut donc remplacer l'arc d'ellipse.

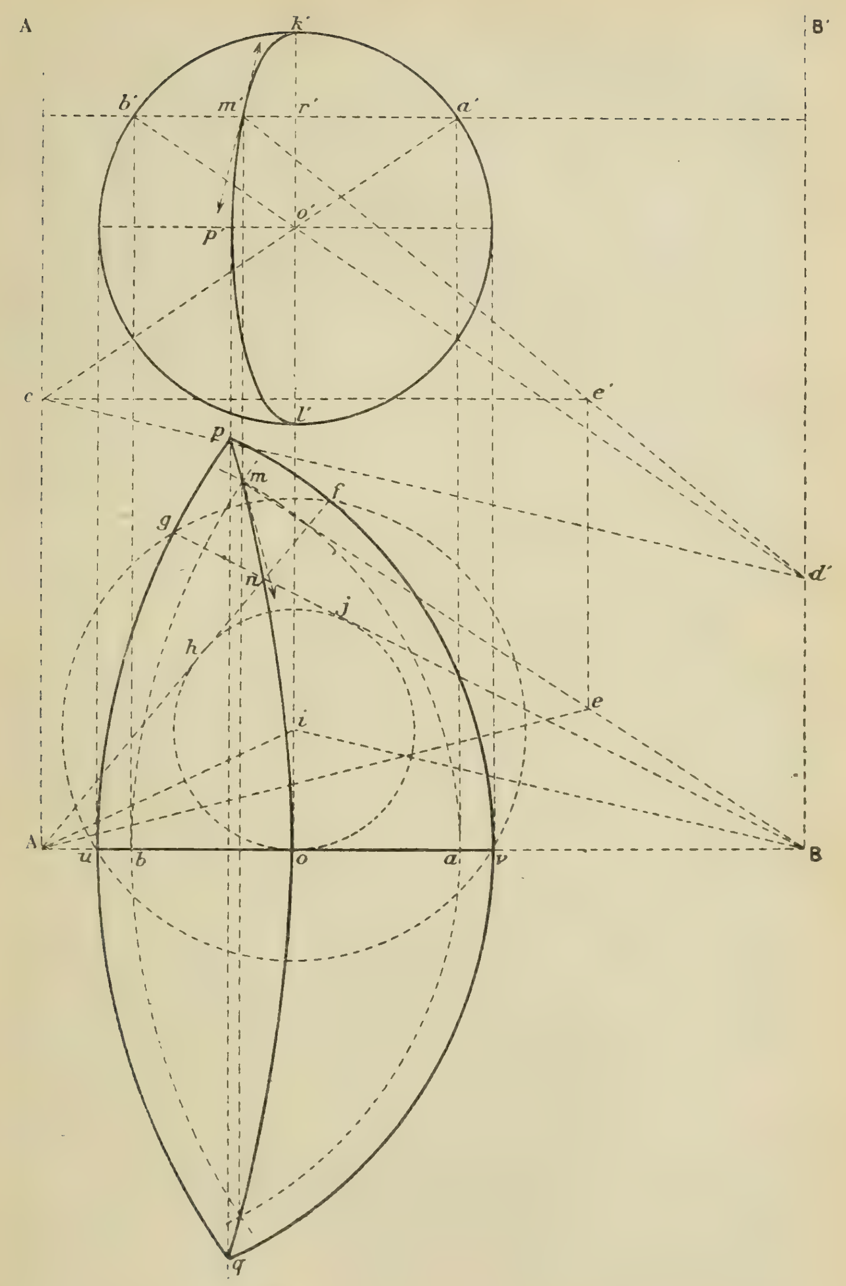
Ponctuation. — En projection verticale, tout est vu. On ne conserve, du contour apparent du cylindre, que le segment i'5'.

En projection horizontale, les arcs 12, 89, 1 H 9, 1 i 9 sont cachés à la fois sur les deux solides, donc sur le solide commun. L'arc 258 est, au contraire, vu, parce qu'il est vu sur l'hyperboloïde. Le contour apparent du cylindre est entièrement enlevé; celui de l'hyperboloïde est limité à l'arc 2 d8.

5. *Solide commun à deux tores à axes verticaux, ayant en commun un cercle méridien de front* (*fig.* 20).

L'intersection complète de deux tores quelconques est une courbe du seizième degré. Chacune des deux surfaces admet le cercle de l'infini comme cercle double (t. II, n° 589); cette ligne doit donc être comptée quatre fois dans l'intersection (chaque nappe du premier tore coupe chaque nappe du deuxième tore suivant ce cercle); elle tient lieu, par conséquent, d'une courbe du huitième degré. Le reste de l'intersection constitue donc aussi une courbe du huitième degré. Dans le cas particulier actuel, cette courbe comprend déjà le cercle méridien commun. Comme les deux surfaces se raccordent le long de ce cercle, il doit être compté deux fois (t. II, n° 489), c'est-à-dire comme une courbe du quatrième degré. En définitive, il reste seulement à construire une courbe du quatrième degré. Cette courbe doit d'ailleurs se projeter horizontalement et verticalement suivant une conique, parce que le plan des équateurs et le plan des axes en sont des plans de symétrie. Nous

Fig. 20.



allons le vérifier, d'une manière élémentaire, sur la construction d'un point quelconque.

Coupons par un plan horizontal $a'b'$. Nous obtenons deux parallèles sur chaque tore. Il faut les associer de manière qu'ils se coupent en des points réels et n'appartenant pas au méridien commun. Une seule combinaison convient; c'est celle des cercles de rayons Aa et Bb, qui donnent le point (m, m') et le point symétrique par rapport au plan des axes.

Construisons la tangente en (m, m'), par la méthode des normales. Le plan des axes coupe le plan normal suivant la frontale (AB, $c'd'$); donc, la tangente en m' est perpendiculaire à $c'd'$. Si nous coupons maintenant le plan normal par le plan horizontal $c'e'$, nous obtenons une droite projetée horizontalement en Ae; donc, la tangente en m est perpendiculaire à Ae.

Montrons maintenant que le lieu du point m' est une ellipse, de grand axe $k'l'$. Appelons a et b les distances Ao et Bo. Écrivons que le point m' a même puissance par rapport aux deux parallèles :

$$(a - r'm')^2 - (a + r'b')^2 = (b + r'm')^2 - (b + r'b')^2;$$

d'où

$$\frac{r'm'}{r'b'} = \frac{b - a}{b + a}.$$

Il suit de là que le lieu de m' est une ellipse, dont le cercle homographique est le cercle méridien commun aux deux tores.

En vérité, la moitié de gauche de cette ellipse convient seulement, l'autre moitié constituant une branche virtuelle, obtenue en associant les deux autres parallèles.

Cherchons maintenant le lieu du point m. Nous avons

$$m\mathrm{B} - m\mathrm{A} = \mathrm{B}b - \mathrm{A}a = \mathrm{B}o - \mathrm{A}o.$$

Donc, le lieu de m est une branche d'hyperbole, de foyers A et B et d'axe transverse égal à $b - a$. En réalité, l'arc poq seul convient, le reste de l'hyperbole étant constitué par des branches virtuelles.

On peut arriver au même résultat, en construisant un point quelconque en coupant par une sphère contenant le cercle méridien commun (n° 69). En projection horizontale, le contour apparent de cette sphère est un cercle passant par u et v et ayant pour centre un point quelconque i de oo'. Cette sphère coupe le premier tore suivant un deuxième cercle méridien symétrique du premier par rapport au plan vertical Ai, qui est un plan de symétrie pour le tore et pour la sphère. Ce deuxième cercle méridien se projette horizontalement sur la droite Af. De même, la sphère coupe le deuxième tore suivant un cercle méridien projeté

sur Bg. Ces deux cercles se rencontrent en deux points symétriques par rapport au plan des équateurs et projetés horizontalement en n.

Pour trouver le lieu de ce point n, considérons le cercle de centre i et de rayon io. Il est inscrit dans le triangle nAB, puisque An, par exemple, est symétrique de Ao par rapport à Ai. On a, dès lors,

$$nB - nA = jB - hA = oB \quad oA = b - a,$$

ce qui démontre une nouvelle fois que le lieu de n est une hyperbole.

Ponctuation. — Tout est vu dans chaque projection. Des contours apparents, il ne reste que les arcs de cercles pvq et puq.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Une surface de révolution a pour axe la verticale dont la trace horizontale a pour coordonnées (0, 150, 0). La courbe génératrice est un cercle, situé dans un plan de profil, de rayon 40 et de centre (80, 190, 50). Construire les contours apparents de cette surface.

2. On reprend l'axe précédent; mais, la courbe génératrice est une ellipse, située dans le plan de bout qui passe par les points (120, 0, 0) et (0, 0, 120) et dont la projection horizontale est un cercle, de rayon 50 et de centre (60, 180, 0). Construire les contours apparents. Construire le point qui a pour projection horizontale (70, 140, 0) et celui qui a pour projection verticale (90, 0, 50). Construire les plans tangents en ces deux points.

3. On reprend l'axe précédent. La courbe génératrice est une parabole, située dans un plan de front d'éloignement 80 et dont la projection verticale admet le point (0, 0, 10) pour point à tangente horizontale et le point (— 60, 0, 70) pour point à tangente verticale. Construire les contours apparents, ainsi que la section par le plan : $z - x = 70$.

4. Un tore a pour axe la droite

$$z - x = 100, \qquad y = 130.$$

Son cercle générateur a pour rayon 40 et pour centre (80, 130, 40). Construire ses contours apparents, ainsi que son ombre propre, en le supposant éclairé par des rayons lumineux parallèles à la ligne de terre et venant de droite.

5. Un tore a pour axe la verticale qui passe par le point (0, 110, 0).

Son cercle générateur a pour rayon 45 et pour centre le point (60, 110, 70). Représenter ce tore, en le supposant éclairé par le point (— 105, 110, 150).

6. Un ellipsoïde de révolution a pour axe la droite

$$2z - x = 200, \qquad y = 60.$$

Son centre a une abscisse nulle; l'axe porté par l'axe de révolution a pour longueur 200; le rayon de l'équateur est 50. Représenter cet ellipsoïde, en le supposant éclairé par les rayons à 45° habituels.

7. Même question pour un paraboloïde, admettant l'axe précédent et tangent au plan horizontal en un point d'abscisse — 50.

8. Même question pour un hyperboloïde à deux nappes, admettant toujours le même axe, admettant le plan horizontal de cote 100 pour plan asymptote et dont l'axe transverse a pour longueur 80.

9. On reprend l'ellipsoïde du n° 6. Construire ses points brillants pour un observateur à l'infini sur une verticale ou sur une droite de bout. (On appelle *point brillant* pour un observateur donné tout point tel que le rayon qui se réfléchit sur la surface, en admettant ce point pour point d'incidence, aille passer par l'œil de l'observateur. Si la source lumineuse et l'observateur sont à l'infini, on connaît la direction de la normale et, par conséquent, du plan tangent en un tel point.)

10. Construire la section d'un tore à axe vertical par un de ses plans bitangents de bout. Déduire de la construction d'un point quelconque une démonstration élémentaire du théorème de Villarceau (t. II, n° 389). Démontrer que la projection horizontale de chacun des deux cercles qui constituent l'intersection admet pour foyer la trace horizontale de l'axe.

(Soit m' la projection verticale d'un point de l'intersection. On pourra calculer ses coordonnées, dans le plan sécant, en fonction du demi-angle au centre correspondant à la corde déterminée, dans le cercle méridien de front, par le plan horizontal auxiliaire ayant servi à construire m'. Pour démontrer que la trace de l'axe est foyer, il suffit de chercher les axes d'une des ellipses et de calculer ensuite sa distance focale.)

11. Un tore à axe vertical admet pour rayons des cercles de l'équateur R et 3R. Construire sa section par un plan de front d'éloignement R et démontrer que cette section est une lemniscate de Bernoulli (t. II, n° 377).

12. On coupe une quadrique de révolution à axe vertical par un plan quelconque. Construire les points de la section dont la tangente passe par un point donné, soit en projection horizontale, soit en projection verticale. [On peut se ramener à une section plane de cône à base horizontale circulaire, en considérant le cône qui s'appuie sur la section et qui a pour sommet un ombilic de la quadrique (*cf.* n° 64).]

13. On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Construire un plan passant par une droite donnée et coupant cet ellipsoïde suivant une ellipse semblable à une ellipse donnée (*cf.* Chap. IV, Exercice proposé n° 18).

14. Trouver une sphère passant par un cercle donné et tangente au plan horizontal (intersection d'une droite et d'un paraboloïde de révolution; *cf.* Chap. IV, Exercice proposé n° 23).

15. Construire le lieu des centres des sphères passant par deux points donnés et tangentes au plan horizontal (section plane d'un paraboloïde de révolution). On peut en déduire, d'une manière élémentaire, que la projection horizontale d'une telle section est un cercle (*cf.* Chap. IV, Exercice proposé n° 24).

16. On donne un ellipsoïde de révolution, dont l'axe est vertical et perce le plan horizontal au point (0, 100, 0). Les sommets situés sur cet axe ont pour cotes 0 et 200. Le rayon de l'équateur est 65. On mène la tangente à la méridienne principale, dont les paramètres directeurs sont (1, 0, 2) et dont le point de contact a une abscisse négative. Cette tangente est une génératrice d'un cône dont le sommet a pour cote 200 et dont la base dans le plan horizontal est un cercle ayant pour centre la trace de l'axe de l'ellipsoïde. Représenter le cône entaillé par l'ellipsoïde. (Il y a un point double, dont on pourra construire les tangentes. On pourra aussi construire les asymptotes des branches virtuelles, en remarquant que le plan horizontal est déjà un plan de section homothétique.)

17. Un paraboloïde de révolution a pour sommet et foyer les points (0, 150, 0) et (0, 150, 60). On en conserve seulement une calotte limitée au plan horizontal de cote 60. Dans ce plan, on décrit un cercle sur le rayon de front et de gauche du parallèle comme diamètre. Ce cercle est opaque, ainsi que la surface de la calotte. Le tout est éclairé par des rayons à 45°. Représenter l'ombre.

18. Intersection d'une quadrique de révolution à axe vertical avec un cône à base horizontale circulaire et dont le sommet est un des ombilics

de la quadrique. (L'intersection comprend les génératrices isotropes du cône, donc une autre conique.)

19. On reprend l'ellipsoïde du n° 16. Un disque elliptique opaque est situé dans un plan vertical et a pour sommets les points (—75, 120, 120) et (—5, 190, 120); en outre, son petit axe a pour longueur 70. Le tout est éclairé par les rayons habituels à 45°. Représenter l'ellipsoïde avec ses ombres. (Remarquer que le cylindre limitant l'ombre portée par le disque a une base horizontale circulaire.)

20. On reprend toujours le même ellipsoïde. Un cône a pour sommet le point le plus en avant de l'équateur et pour base un cercle déduit de cet équateur par la translation (65, 0, —100). Représenter l'ellipsoïde entaillé par le cône.

21. Un paraboloïde de révolution a pour sommet et foyer les points (0, 100, 150) et (0, 100, 120). Un cylindre a pour base, dans le plan horizontal, le cercle de centre (—65, 130, 0) et de rayon 80. Ses génératrices sont parallèles à la droite qui joint le centre de la base au point (0, 100, 105). Représenter le paraboloïde entaillé par le cylindre et limité aux deux plans de projection.

22. Deux cônes de révolution ont leurs axes parallèles à la ligne de terre. Leurs sommets respectifs ont pour coordonnées (—80, 140, 140) et (0, 140, 170) et leurs angles au sommet sont respectivement égaux à 60° et 120°. On les limite par le plan de profil d'abscisse 80. Représenter le solide commun. (La projection verticale est une parabole, dont on pourra construire le sommet, en partant de la construction de la tangente en un point quelconque et cherchant à déterminer le plan sécant auxiliaire pour que cette tangente soit horizontale, ce qui peut se faire en observant que la condition ainsi imposée fait connaître le rapport des rayons des deux parallèles.)

23. Un cône de révolution à axe vertical a pour sommet le point (30, 150, 200) et pour demi-angle au sommet 40°. Une sphère, de rayon 60, a pour centre le point (—90, 150, 150). Le tout est éclairé par des rayons lumineux de paramètres directeurs (1, 0, —1). Représenter l'ombre portée par la sphère sur le cône.

24. Une sphère a pour rayon 80 et pour centre (0, 90, 90). Un cône de révolution a pour sommet (—80, 90, 230). Son axe passe par le point (25, 90, 90). Une de ses génératrices est la tangente non verticale menée par son sommet au cercle de contour apparent vertical de la sphère. Représenter le cône entaillé par la sphère et limité aux deux

parallèles qui passent par les points où la deuxième génératrice de front du cône rencontre le contour apparent vertical de la sphère. (E. C., 1895.)

25. Une sphère a pour rayon 80 et pour centre (0, 100, 100). Un cône de révolution contient le diamètre vertical de cette sphère; il est, en outre, tangent à la sphère à l'extrémité du rayon dont les paramètres directeurs sont (— 1, 0, 1). Le tout est éclairé par les rayons habituels à 45°. Représenter l'ensemble des deux solides, en ne gardant du cône que la nappe inférieure limitée à la sphère.

26. Un cône de révolution à axe vertical a pour sommet (— 10, 100, 210) et pour trace horizontale un cercle de rayon 80. Un ellipsoïde de révolution allongé a pour axe la perpendiculaire à la génératrice de front et de gauche du cône menée par le point (— 10, 100, 80). Son centre est à une distance de ce dernier point égale à 25 et à gauche. Les longueurs des axes de l'ellipse méridienne sont 220 et 120. Représenter l'ensemble des deux solides, en supprimant les parties de l'ellipsoïde extérieures aux deux plans tangents de bout du cône. (E. C., 1896.)

27. Un paraboloïde de révolution a pour sommet et foyer les points (70, 55, 150) et (70, 55, 93). Un cône de révolution admet pour section méridienne la parallèle à la ligne de terre menée par le sommet du paraboloïde et une verticale d'abscisse — 50. La courbe d'intersection de ces deux surfaces sert de directrice à un second cône ayant même sommet que le paraboloïde. Représenter le solide commun aux deux cônes, en les limitant par le plan horizontal de cote 96. (E. P., 1896.)

28. Un tore à axe vertical a un cercle générateur de rayon 60. Les tangentes communes intérieures des deux cercles méridiens de front sont rectangulaires. Le parallèle inférieur a pour cote 15 et le point le plus en arrière a pour éloignement 15. Parmi les quatre points de contact des tangentes communes précédentes, on choisit celui qui est le plus élevé et le plus à droite comme centre d'une sphère tangente extérieurement au cercle méridien de gauche. Représenter le tore entaillé par la sphère.

29. Un hémisphère repose par sa base sur le plan horizontal; son rayon est 100 et son centre a pour coordonnées (0, 100, 0). Un tore à axe vertical a pour centre (0, 170, 51); les cercles de l'équateur ont pour rayons 21 et 119. Représenter l'hémisphère entaillé par le tore. (E. C., 1878. La sphère est bitangente au tore et le coupe, par conséquent, suivant deux cercles.)

30. Un tore a pour centre le point (0, 120, 120). Les paramètres directeurs de son axe sont (2, 0, 1). Les cercles de l'équateur ont pour rayons 40 et 120. Une sphère contient le cercle méridien de front le plus bas; son centre a pour éloignement 150. Représenter le tore entaillé par la sphère.

31. Par le point O (— 40, 110, 200), on mène une verticale et une droite de paramètres directeurs (2, 0, — 1). On fait tourner successivement autour de ces deux droites un cercle situé dans leur plan, de centre C (20, 110, 50) et de rayon 40. On obtient ainsi deux tores. Représenter le premier entaillé par le second. (La projection verticale de l'intersection est une ellipse; on peut le démontrer élémentairement, à partir de la construction du point courant, en calculant l'équation par rapport à deux diamètres conjugués, dont l'un est CO et l'autre parallèle à la droite joignant m' au milieu de la corde interceptée par la sphère auxiliaire sur le cercle générateur.)

32. On donne un losange ABCD, dans le plan horizontal de cote 30. Le côté AB est dans le plan vertical; la diagonale AC issue du sommet le plus à gauche a pour longueur 200 et la diagonale BD a pour longueur 120. Le losange, en tournant autour de AC, engendre un double cône. Le cercle qui passe par C, D et par le centre du losange engendre un tore, en tournant autour de AB. Représenter le double cône entaillé par le tore et limité au plan horizontal. (E. P., 1878.)

33. Un tore à axe vertical a pour centre le point (0, 135, 50). Les parallèles maximum et minimum ont pour rayons 130 et 40. Un cône a pour sommet (0, 135, 135) et pour directrice la section du tore par le plan de profil qui passe à 85 à droite de l'axe. Représenter le tore entaillé par le cône (E. C., 1896). — (Le reste de l'intersection est sur la sphère inverse du plan de base du cône par rapport au sommet de ce cône, la puissance d'inversion étant celle qui transforme le tore en lui-même. On est donc ramené à une intersection de sphère et de tore.)

34. Un tore à axe vertical a pour centre (0, 120, 80). Le centre de son cercle générateur décrit un cercle de rayon 80. Le rayon de son parallèle maximum est 130. Un cône de révolution a pour sommet (80, 200, 80). Son axe est de bout et son angle au sommet est droit. Représenter le tore entaillé par le cône. (Couper par des sphères passant par le cercle méridien qui admet pour axe l'axe du cône.)

35. On coupe un tore à axe vertical par le cylindre circonscrit le long d'un cercle méridien de front. Démontrer que la projection horizontale

de l'intersection est une parabole admettant pour foyer la trace horizontale o de l'axe du tore et pour sommet la projection horizontale du centre du cercle méridien. (Couper par un plan horizontal et montrer que la distance mo est égale à la distance de m à la directrice.)

36. Construire une droite s'appuyant sur deux droites données et faisant avec elles des angles donnés. (On cherche d'abord la direction de la droite, au moyen de l'intersection de deux cônes de révolution de même sommet.)

CHAPITRE VI.

SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION.

EXERCICES RÉSOLUS.

I. *On donne une surface gauche de révolution, de centre* (o, o'), *à axe vertical et dont les génératrices sont inclinées à 45° sur le plan horizontal. Un cône de révolution a son sommet* (s, s') *sur la tangente au cercle de gorge parallèle à la ligne de terre et de plus grand éloignement. Son axe est la tangente à ce cercle au point le plus à droite. Sa base dans le plan de front* F *qui contient l'axe de l'hyperboloïde est un cercle* A' *double du cercle de gorge. En supposant que l'hyperboloïde est plein à l'intérieur du cercle de gorge, représenter le solide commun, en le limitant au plan de front qui passe par le point le plus en arrière du cercle de gorge et au plan symétrique par rapport au sommet du cône* (*fig* 21).

Nous avons affaire à deux surfaces de révolution; mais, leurs axes ne sont pas dans un même plan. Pour construire un point quelconque, nous prendrons l'intersection d'une génératrice de l'hyperboloïde avec le cône ou, ce qui revient au même, nous couperons par un plan auxiliaire passant par le sommet du cône et par une génératrice quelconque de l'hyperboloïde (n° **82**).

Considérons, par exemple, la génératrice qui passe par le point (B, B') du cercle de gorge et par le point (D, D') pris sur le parallèle H, lequel a été déterminé au moyen du point $(3, 3')$ d'une génératrice de front. Cherchons la trace du plan $(sBD, s'B'D')$ sur le plan de base F du cône. Cette trace contient d'abord la trace (E, E') de la génératrice; en outre, elle est parallèle à la frontale $(sG, s'G')$; sa projection verticale est donc $E'K'L'$ parallèle à $s'G'$. Elle rencontre le cercle A' aux deux points K' et L'. Les génératrices $s'K'$ et $s'L'$ du cône rencontrent $B'D'$ aux points 2' et 10'', qui appartiennent à la projection verticale de l'intersection et qui se rappellent en 2 et 10, sur BD.

Construisons, par exemple, la tangente au point $(10, 10'')$, en prenant

l'intersection des plans tangents. Pour construire cette intersection, nous coupons par le plan auxiliaire F. Le plan tangent au cône est coupé suivant la tangente $L't'$ à la base A'. Le plan tangent à l'hyperboloïde est déterminé par les génératrices (BD, B'D') et (MN, M'N') issues du point (10, 10''). Prenons leurs traces (E, E') et (N, N') sur F; la droite E'N' est la projection verticale de la trace du plan tangent à l'hyperboloïde. Elle rencontre la trace du plan tangent au cône en t', qui se rappelle en t. La tangente cherchée est la droite (10t, 10''t').

Points remarquables. — Nous avons d'abord les points sur les contours apparents horizontaux, en coupant par le plan du cercle de gorge. Nous obtenons seulement les points 1 et 4, qui se rappellent en 1' et 4'. Dans l'espace, les tangentes en ces points sont verticales; elles se conservent en projection verticale; mais, en projection horizontale, nous nous trouvons dans le cas d'exception (n° 1) et il nous faut prendre, pour chaque point, la trace horizontale du plan osculateur. A cet effet, nous appliquons le théorème de Meusnier (n° 6).

Pour le point (1, 1'), le centre de courbure normale est (b, b') relativement à l'hyperboloïde. C'est le centre de courbure de l'hyperbole méridienne en son sommet et l'on sait que le rayon de courbure en ce point est égal au demi-axe transverse (t. II, n° 532); donc b' est symétrique de o' par rapport à 1'. Le centre de courbure normale relativement au cône est le point de rencontre (c, s') de la normale avec l'axe. La droite (bc, $b's'$) est l'axe de courbure de la courbe d'intersection. Le plan osculateur, qui lui est perpendiculaire, a donc une trace horizontale perpendiculaire à bc; telle est la direction de la tangente en 1.

Si l'on prend l'intersection de l'axe de courbure précédent avec la normale au cylindre projetant verticalement la courbe, on obtient le point (b, b'); b' est le centre de courbure de la projection verticale en 1' (n° 67).

Procédons de même au point (4, 4'). Le centre de courbure normale pour l'hyperboloïde est projeté horizontalement en d, symétrique de o par rapport à 4. Le centre de courbure normale pour le cône est projeté horizontalement en a, car $4a$ est perpendiculaire à 41. L'axe de courbure a pour projection ad. La tangente en 4 est perpendiculaire à cette droite et le point e' est le centre de courbure de la projection verticale en 4'.

Les points sur le contour apparent vertical de l'hyperboloïde sont à l'intersection du cercle A' avec l'hyperbole méridienne. Un calcul facile de géométrie analytique montre que l'abscisse de ces points par rapport à o' est égale au double du rayon du cercle de gorge; cela permet leur

construction exacte et très simple (la droite $6'6''$ est perpendiculaire au milieu du rayon qui aboutit au point le plus à droite de A′). Les tangentes en ces points sont celles de l'hyperbole méridienne; elles ont des directions symétriques de $o'6'$ et de $o'6''$ par rapport à la direction des asymptotes.

Les points (3, 3′), (3, 3″), (7, 7′), (7, 7″) sont donnés par l'intersection des génératrices issues du point (f, o') avec le cercle A″ concentrique à A′ et de rayon double.

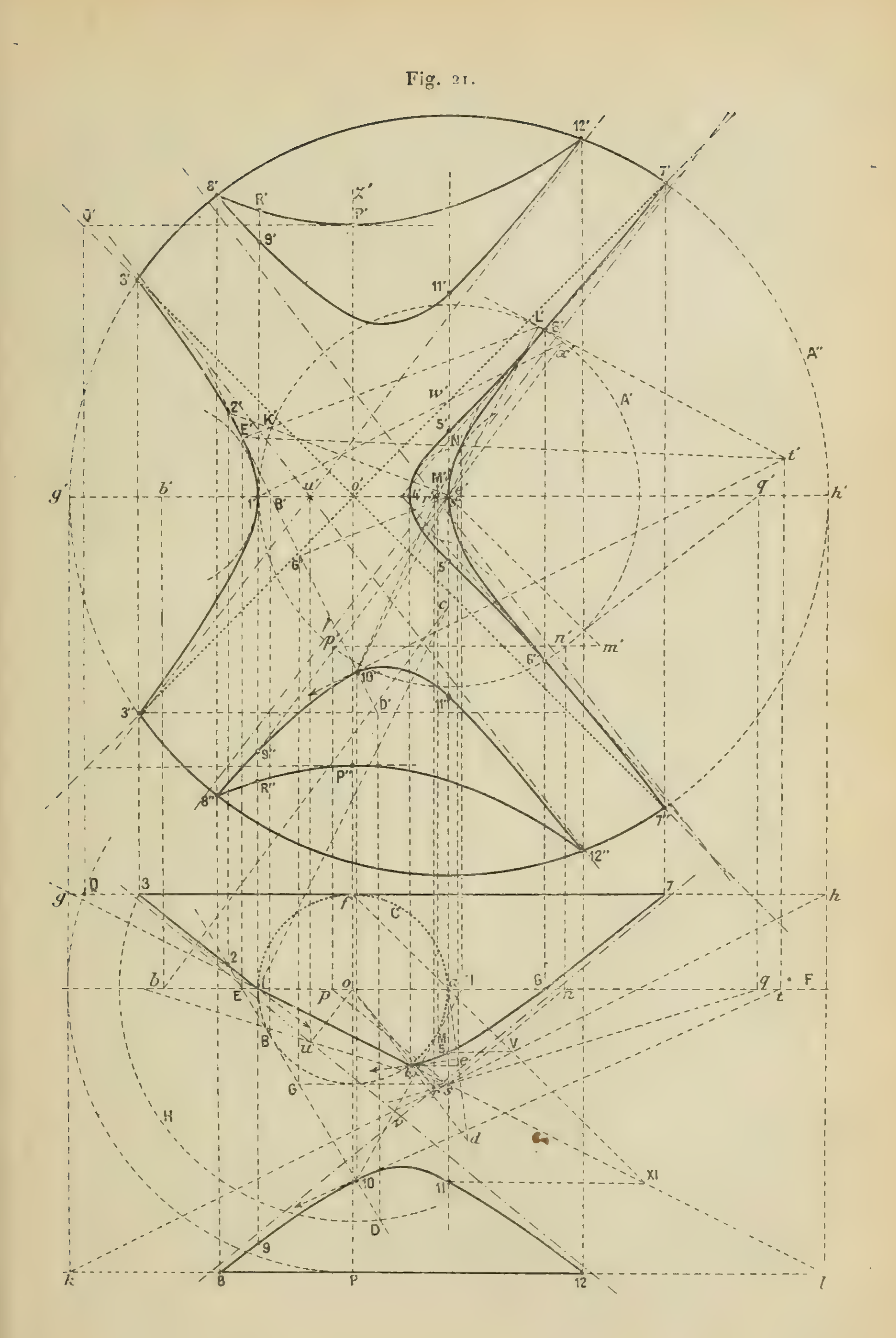
Les points 8 et 12 ont été construits par l'intersection de la droite kl avec l'hyperbole qui constitue la projection horizontale et dont nous allons tout à l'heure indiquer la détermination des asymptotes. On a appliqué la construction du n° 541 du tome II, en se servant du point 4 comme point déjà connu. Des lignes de rappel donnent ensuite 8′, 8″, 12′, 12″, sur le cercle A″.

Les points (5, 5′), (5, 5″), (11, 11′), (11, 11″) ont été obtenus en coupant par le plan de profil de (s, s') et rabattant ensuite ce plan sur le plan du cercle de gorge, la charnière étant par conséquent l'axe du cône. Les génératrices du cône se rabattent suivant les génératrices de contour apparent horizontal sh, sl. Une génératrice de l'hyperboloïde se rabat suivant la droite fa, inclinée à 45° sur as. Les points V et XI sont les rabattements des points (5, 5′) et (11, 11′), dont le relèvement est évident. L'autre génératrice de l'hyperboloïde donnerait les points symétriques (5, 5″) et (11, 11″).

Cherchons enfin les points situés dans le plan de profil du point (1, 1′). Considérons une des génératrices issues de ce point et coupons par le plan qui la contient, en même temps que (s, s'). La parallèle à cette génératrice menée par (s, s') perce le plan de front F au point (a, α'), tel que $s'\alpha' = sa = s'o'$. La trace du plan auxiliaire sur F est $1'\alpha'$; elle rencontre A′ au point x'. La génératrice $s'x'$ rencontre la verticale de 1 au point 9″, qui est la projection verticale d'un des points cherchés. La projection horizontale 9 s'obtient en portant $1\ 9 = 1'9''$. L'autre génératrice issue du point (1, 1′) donnerait le point symétrique (9, 9′).

Asymptotes. — Nous pouvons remplacer l'hyperboloïde par son cône asymptote (n° 9). Cherchons d'abord les directions asymptotiques, en construisant l'intersection du cône proposé avec le cône de même sommet parallèle au cône asymptote de la surface gauche. A cet effet, nous coupons les deux cônes par une sphère ayant pour centre leur sommet commun (n° 66), par exemple, par la sphère qui contient le cercle A′. Le rayon de cette sphère est $s\,1$. En le reportant en $s'm'$ sur une droite à 45°, puis menant l'horizontale du point m', nous avons la projection verticale d'un des parallèles suivant lesquels le second cône est coupé

Fig. 21.



12'
7'
8'
R'
P'
Q'
9'
3'
11'
L'
A''
A'
w'
5'
2'
K'
E'
N'
t'
g'
b'
1'
B'
u'
o'
M'
q'
h'
m'
n'
p'
10''
11''
3''
9''
R''
P''
8''
7''
12''
g
3
f
C
7
h
2
b
E
o
p
G
q
F
t
B
u
M
V
e
d
XI
H
10
11
D
9
k
8
P
12
l

par la sphère auxiliaire. Cette droite rencontre A' en n' et p' qui se rappellent en n et p, sur F. Finalement, les droites $(sn, s'n')$ et $(sp, s'p')$ sont deux des directions asymptotiques cherchées, les deux autres étant symétriques des premières par rapport au plan horizontal.

Cherchons l'asymptote correspondant à la direction $(sn, s'n')$. C'est l'intersection des plans tangents au cône proposé et au cône asymptote le long des génératrices parallèles à cette direction. Pour construire cette intersection, coupons par le plan de gorge. La tangente en (n, n') à la base du cône donné perce ce plan en (q, q'); en joignant $(sq, s'q')$, on a la trace du premier plan tangent sur le plan de gorge. Quant à la trace du plan tangent au cône asymptote, c'est évidemment la perpendiculaire $(or, o'r')$ menée par (o, o') à la direction horizontale projetée en sn. Elle rencontre la première trace en (r, r'). En menant, par ce point, une parallèle à $(sn, s'n')$, nous avons l'asymptote cherchée.

On détermine de même, au moyen du point (u, u'), l'asymptote parallèle à $(sp, s'p')$. Les deux autres asymptotes sont symétriques des deux premières par rapport au plan de gorge.

Degrés des projections. — La courbe de l'espace est une biquadratique. Elle admet le plan de gorge pour plan de symétrie, puisque ce plan est plan de symétrie pour chacune des deux surfaces. Il suit de là que la projection horizontale est du second degré, donc une hyperbole, puisqu'elle possède deux asymptotes. Quant à la projection verticale, c'est une courbe du quatrième degré, admettant $o's'$ comme axe de symétrie.

Jonction des points. — Elle ne présente aucune difficulté, en partant de la projection horizontale. A l'arc 3 2 1, correspond $3'1'3''$; l'arc 1 4 (non tracé sur la figure) est virtuel; l'arc 4 5 6 7 donne $7'4'7''$; enfin, à l'arc 8 9 10 11 12, correspondent les deux arcs $8'9'12'$ et $8''9''12''$.

Sections par les plans de front limites. — La section par le plan gh se compose de deux génératrices pour l'hyperboloïde et du cercle A pour le cône. On ne doit conserver que la portion de chacune de ces sections qui est intérieure à l'autre, à savoir les segments $3'o'7'$ et $3''o'7''$ et les arcs de cercle $3'8'7'$ et $3''8''7''$. (Remarquer que les angles situés dans la partie solide de l'hyperboloïde sont $3'o'7'$ et $3''o'7''$.)

La section par le plan kl se compose des deux arcs de cercle $8'12'$ et $8''12''$ pour le cône et des deux arcs d'hyperbole $8'P'12'$ et $8''P''12''$ pour la surface gauche. [Les sommets P' et P'' ont été obtenus en construisant les projections verticales des deux points de l'hyperboloïde projetés horizontalement en P (n° 80, I). On a construit aussi les

points R′ et R″, en portant 1′R′ = 1′R″ = oP. Enfin, les asymptotes sont les mêmes que pour la méridienne principale, c'est-à-dire 7′o′3″ et 7″o′3′. Elles ont permis de construire les tangentes (non reportées sur la figure) aux points 8′, 8″, 12′, 12″.]

Ponctuation. — En projection horizontale, toute la courbe est vue, parce que la partie qui est au-dessus du plan de gorge est certainement vue sur le cône. Il en est de même pour les projections 3 7 et 8 12 des arcs de cercles des plans limites.

On ne conserve des contours apparents que le segment 1 4 du cône et l'arc 1f4 du cercle de gorge. Ce dernier est d'ailleurs caché. (Le cercle de gorge d'une surface gauche à axe vertical n'est vu que lorsque cette surface est creuse, contrairement à l'hypothèse actuelle.)

En projection verticale, les arcs 8′12′, 8″12″, 6′4′6″ sont en avant du plan F; il sont donc vus sur l'hyperboloïde et, par suite, sur le solide commun. L'arc 3′1′3″ serait caché à la fois sur les deux solides, si ceux-ci étaient conservés en entier. Mais, il devient vu sur le cône quand on enlève la partie de la nappe antérieure qui est intérieure à l'hyperboloïde. Il en va de même pour les arcs 6′7′ et 6″7″. Finalement, toute la courbe est vue en projection verticale.

Les arcs de cercle et l'hyperbole du plan kl le sont évidemment aussi.

Dans le plan gh, les arcs de cercle 3′8′, 3″8″, 7′12′, 7″12″ sont seuls vus; les segments de génératrices 3′7″ et 3″7′ sont cachés.

On ne conserve du contour apparent de la surface gauche que l'arc 6′s′6″ de la méridienne principale, qui est intérieur au cercle A′; il est vu. (Il serait, au contraire, caché, si l'hyperboloïde était creux.)

Une fois la ponctuation terminée, on peut se rendre compte que le solide représenté se compose de trois morceaux. Deux appartiennent à la nappe antérieure du cône et sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan de gorge. Le troisième appartient à la nappe postérieure du cône.

II. *Soit un cube, dont une face* ($abcd$, $a'b'c'd'$) *est de front. L'arête* (ab, $a'b'$) *est verticale. Le sommet* (a, a'), *qui est le plus bas, le plus à gauche et le plus en avant, a pour coordonnées* (0, 36, 36). *L'arête du cube a pour longueur* 20.

On fait tourner autour de (ab, $a'b'$) *la diagonale de la deuxième face de front du cube qui se projette verticalement suivant* $a'c'$. *On obtient ainsi un hyperboloïde* H. *On fait ensuite tourner autour de* (bd, $b'd'$) *l'arête de cette deuxième face qui se projette verticalement suivant* $c'd'$. *On obtient un hyperboloïde* H′. *Représenter le solide commun, en le limitant aux plans horizontaux de cotes* 4 *et* 68

(*on suppose que chaque hyperboloïde est plein dans la région qui comprend son axe*) (*fig.* 22).

La perpendiculaire commune à l'axe et la génératrice donnée de H a pour pieds sur ces deux droites (a, a') et (e, a'). Le cercle de gorge se projette donc horizontalement suivant le cercle de centre a et de rayon ae et verticalement sur l'horizontale $a'd'$. La méridienne principale est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les projections verticales $a'h'$ et $a'h''$ des génératrices de front. Le demi-axe transverse est $a'd'$.

Les deux plans horizontaux qui limitent la surface sont équidistants du plan de gorge. En prenant la trace (h, h') d'une des génératrices de front sur le plan inférieur, par exemple, on a un point du parallèle suivant lequel ce plan coupe H. Le parallèle du plan supérieur est symétrique du premier par rapport au plan de gorge et a, par conséquent, la même projection horizontale. Les traces (g, g'), (g, g''), (H, H'), (H, H'') de ces deux parallèles sur le plan de front ac donnent les points extrêmes de la méridienne principale. La tangente en g', par exemple, a été construite au moyen de la normale $g'k'$, le point k' étant le point de rencontre de l'axe avec la perpendiculaire en h'' à $a'h''$ (cette perpendiculaire est la trace du plan normal à une quelconque des génératrices de front de projection verticale $a'h''$). On aurait pu aussi la construire en se servant des asymptotes.

La perpendiculaire commune à l'axe et à la génératrice donnée de H' a pour pieds sur ces deux droites (d, d') et (f, d'). Le cercle de gorge se projette verticalement sur la droite d'D' perpendiculaire à $d'b'$. Son rayon df est égal au rayon du cercle de gorge précédent, de sorte que les deux hyperboloïdes sont égaux. Pour faire les constructions relatives à H', il sera commode de prendre comme plan horizontal auxiliaire de projection le plan de son cercle de gorge. Si l'on prend comme plan vertical le plan de front des axes, la ligne de terre sera xy pour H et x_1y_1 pour H'. Dans le deuxième système, le cercle de gorge de H' se projette horizontalement suivant le cercle de centre d' et de rayon $d'a'$.

Le contour apparent vertical de H' est sa méridienne principale, c'est-à-dire une hyperbole équilatère admettant pour asymptotes $d'c'$ et $d'a'$ et pour demi-axe transverse d'D'. Elle rencontre les plans horizontaux limites aux points (L, L') et (M, M'), symétriques l'un de l'autre par rapport à (d, d'). Pour construire L', par exemple, le plus simple eût été de construire (t. II, n° 541) le point de rencontre de l'hyperbole méridienne, définie par ses asymptotes et son sommet D', avec la droite g'H', qui est parallèle à une des asymptotes. A titre d'exercice, nous avons indiqué une autre construction, qui consiste à chercher le point de rencontre de l'hyperboloïde avec la droite (gH, g'H'), qui a déjà son point à l'infini

en commun avec la surface. Suivant la méthode indiquée au n° 80, IV, coupons par le plan contenant cette droite et la génératrice parallèle ($3''2''$, $d'a'$). Prenons la trace de ce plan sur le plan de gorge, en utilisant le deuxième système de projection. La trace de $g'H'$ a ses deux projections confondues en I', sur x_1y_1. La trace de la génératrice est le point (J_1, d') du cercle de gorge. La trace du plan auxiliaire est donc ($I'J_1$, $I'd'$). Elle rencontre le cercle de gorge en un point de projection horizontale K_1. La génératrice issue de ce point et située dans le plan auxiliaire se projette horizontalement suivant la tangente en K_1 au cercle de gorge; cette tangente rencontre x_1y_1 en L_1, qui se rappelle, en L', sur $g'H'$.

Les plans horizontaux limites sont parallèles à un plan tangent au cône asymptote; ils coupent donc la surface suivant deux paraboles, d'ailleurs symétriques l'une de l'autre par rapport au centre (d, d') de la surface. En projection horizontale, ces paraboles ont pour axe commun xy et pour sommets respectifs L et M. Elles passent par les points 3 et 3'', considérés comme les projections horizontales des points de rencontre des plans horizontaux limites avec les deux génératrices verticales de la surface. Cela suffit pour les déterminer. Observons, en outre, qu'elles passent respectivement par les points 4, 4'' et 7, 7'', qui seront construits tout à l'heure. Bien entendu, nous n'avons tracé que les arcs de ces paraboles qui sont intérieurs au cercle de diamètre gH.

Le contour apparent horizontal de H' se réduit aux deux points 3 et 3'', traces des génératrices verticales (n° 83).

Construction de la courbe d'intersection. — Nous avons affaire à deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent au point (b, b'). Pour construire un point quelconque de l'intersection, nous coupons donc par une sphère ayant pour centre ce point (n° 66). Appliquons la méthode à la recherche des points situés sur les parallèles extrêmes de H. Cherchons, par exemple, les points situés sur le parallèle $g'H'$. Nous coupons par la sphère qui contient ce parallèle. Elle coupe H' suivant deux parallèles, qui passent par les points de rencontre de la sphère avec la génératrice verticale (f, $d'c'$). Pour construire ces points, nous coupons par le plan de front ef. Ce plan coupe H suivant deux génératrices, dont l'une rencontre la sphère auxiliaire au point (h, h''). Il coupe donc la sphère suivant un cercle passant par ce point et dont la projection verticale est, par suite, le cercle de centre b' et de rayon $b'h''$. Ce cercle rencontre $d'c'$ en i' (et en un autre point, qui conduirait à des points imaginaires). Le parallèle de H' qui passe par ce point est projeté verticalement suivant la perpendiculaire à $b'd'$, laquelle rencontre $g'H'$ en 7'.

rappelé horizontalement en 7 ou 7″. Les points (7, 7′) et (7″, 7′) sont les deux points cherchés.

Construisons la tangente en (7, 7′), par la méthode des normales. La normale à H rencontre l'axe en k' précédemment déterminé. Pour avoir la normale à H′, considérons le point i' du même parallèle qui se trouve sur la génératrice verticale donnée. Le plan normal à cette génératrice est un plan horizontal, qui rencontre l'axe $b'd'$ au point l'. La droite $k'l'$ est la projection verticale d'une droite de front du plan normal; la tangente en 7′ est donc perpendiculaire à cette droite. La frontale ci-dessus rencontre le plan horizontal g'H′ en m', rappelé en m, sur gH. La droite $7m$ est la projection horizontale d'une horizontale du plan normal. La tangente en 7 est donc perpendiculaire à cette droite.

On a opéré de même pour construire les points (4, 4′) et (4″, 4′) et la tangente en l'un d'eux.

La *sphère limite* est celle qui est tangente en (f, c') à la génératrice verticale (f, $d'c'$). Elle a pour rayon $bf = b'd'$. Il s'ensuit qu'elle contient le cercle de gorge de H. Ce cercle rencontre le parallèle $c'a'$ de H′ aux points (2, 2′) et (2″, 2′). En chacun d'eux, la courbe est tangente au cercle de gorge de H, d'après le théorème des surfaces limites (n° 7). (En projection horizontale, on peut aussi remarquer que les points appartiennent au contour apparent horizontal de H.)

Le cylindre projetant horizontalement la courbe et l'hyperboloïde H sont tangents en (2, 2′): donc, en ce point, le centre de courbure normale est le même pour les deux surfaces. Or, pour H, c'est le centre du cercle de gorge. Il s'ensuit que la projection horizontale de ce cercle est le cercle de courbure en 2 à la projection horizontale de la courbe.

La sphère limite coupe H suivant un second parallèle, qui n'est autre que le parallèle passant par (f, c'), point de rencontre des génératrices données des deux surfaces. Il rencontre le parallèle de H′ aux deux points (6, 6′) et (6″, 6′), en chacun desquels la courbe est, comme tout à l'heure, tangente au parallèle de H.

Les points (2, 2′) et (6, 6′) auraient pu aussi être obtenus en coupant les deux surfaces par le plan de front ef. Les sections sont, en effet, des génératrices projetées verticalement suivant $a'h'$, $a'h''$, pour H et suivant $d'c'$, $d'a'$, pour H′. Cette méthode nous donne en même temps le point (3, 3′). Il est facile d'avoir la tangente en 3 à la projection horizontale. Cette tangente est évidemment la trace horizontale du plan tangent en (3, 3′) à H′. Or, ce point est symétrique de (6, 6′) par rapport au point (f, d'), qui est le point central de la génératrice (3, 3′6′). Donc les plans tangents en ces deux points sont symétriques par rapport au plan central ou, ce qui revient au même, par

rapport au plan asymptote (t. II, n° 368). Comme ce plan asymptote est le plan $33''$, contenant les deux génératrices verticales et comme nous connaissons déjà le plan tangent en $(6, 6')$, puisque nous avons la tangente en 6 à la projection horizontale, on en déduit que la tangente en 3 est symétrique de la tangente en 6 par rapport à $3d$. Comme cette dernière tangente est inclinée à 45° sur $3d$, la première n'est autre que le rayon $3a$. (Le point 3 ou 6 est un point double apparent en projection horizontale.)

A titre d'exercice, nous avons indiqué une construction directe du plan tangent en $(3, 3')$ à H'. Il faut chercher la seconde génératrice issue de ce point. Utilisons le second système de projections. La nouvelle projection horizontale du point considéré est 3_1. La seconde génératrice est projetée horizontalement suivant la tangente $3_1 n_1$ au cercle de gorge. Le point de contact n_1 se rappelle en n', sur $x_1 y_1$, puis en n dans l'ancien système de projection. Le point (n, n') appartient au plan tangent cherché; donc $3n$ est la trace horizontale de ce plan. On vérifie graphiquement et l'on peut démontrer par des raisonnements de géométrie élémentaire que cette droite coïncide bien avec $3a$.

Les points sur les contours apparents verticaux sont les points de rencontre $1'$ et $5'$ des deux méridiennes. Ils ne peuvent être construits à la règle et au compas. En projection horizontale, ils se rappellent en 1 et 5, sur xy et donnent les sommets de cette projection.

Les tangentes en $1'$ et $5'$ se construisent par la méthode habituelle des normales. Par exemple, la tangente en $5'$ est perpendiculaire à la droite $o'r'$, projection verticale de l'axe de courbure. Le point de rencontre (s, s') de cette droite avec le plan horizontal de $5'$ donne le centre de courbure s de la projection horizontale. On a construit de même la tangente en $1'$ et le centre de courbure t en 1.

Asymptotes. — Les directions asymptotiques sont les génératrices d'intersection des deux cônes asymptotes, celui de H', par exemple ayant subi une translation amenant son sommet en (a, a'). Pour construire ces génératrices, coupons par la sphère de centre (a, a') et de rayon $a'c'$. Nous obtenons des parallèles projetés verticalement suivant $c'v'$ et $u'v'$. Ils se rencontrent au point (v, v') et en un point symétrique. La direction $(av, a'v')$ est une direction asymptotique.

Cherchons l'asymptote correspondante, en prenant l'intersection des plans tangents aux deux cônes asymptotes, pris dans leurs positions véritables, le long des génératrices parallèles à la direction considérée. Pour avoir un point de cette intersection, coupons par le plan horizontal auxiliaire $c'b'$. Il coupe le plan tangent au premier cône suivant la

tangente $c\omega$ à la base. Pour avoir l'intersection avec le plan tangent au second cône, utilisons le deuxième système de projection. Si nous prenons comme plan de base $A'B'$, nous avons, en (B_1, B'), la trace de la génératrice. En revenant à l'ancien système de projection, ce point devient (B, B'). D'autre part, le plan $x_1 y_1$ coupe le plan auxiliaire $c'b'$ suivant la droite de bout $C'C_1$ et le plan tangent au cône suivant une droite dont la projection horizontale $d'C_1$ est perpendiculaire à $d'B_1$. Le point (C_1, C') est un second point de l'intersection du plan auxiliaire avec le second plan tangent. Dans l'ancien système, il vient en (C, C'). La droite CB rencontre finalement $c\omega$ en ω, qui est la projection horizontale du point cherché. En menant par ce point la parallèle à ac, on a une asymptote de la projection horizontale. On en a une deuxième par symétrie par rapport à xy.

En projection verticale, ω se rappelle en ω', sur $b'c'$ et l'on a une asymptote de la projection verticale en menant par ce point une parallèle à $a'v'$.

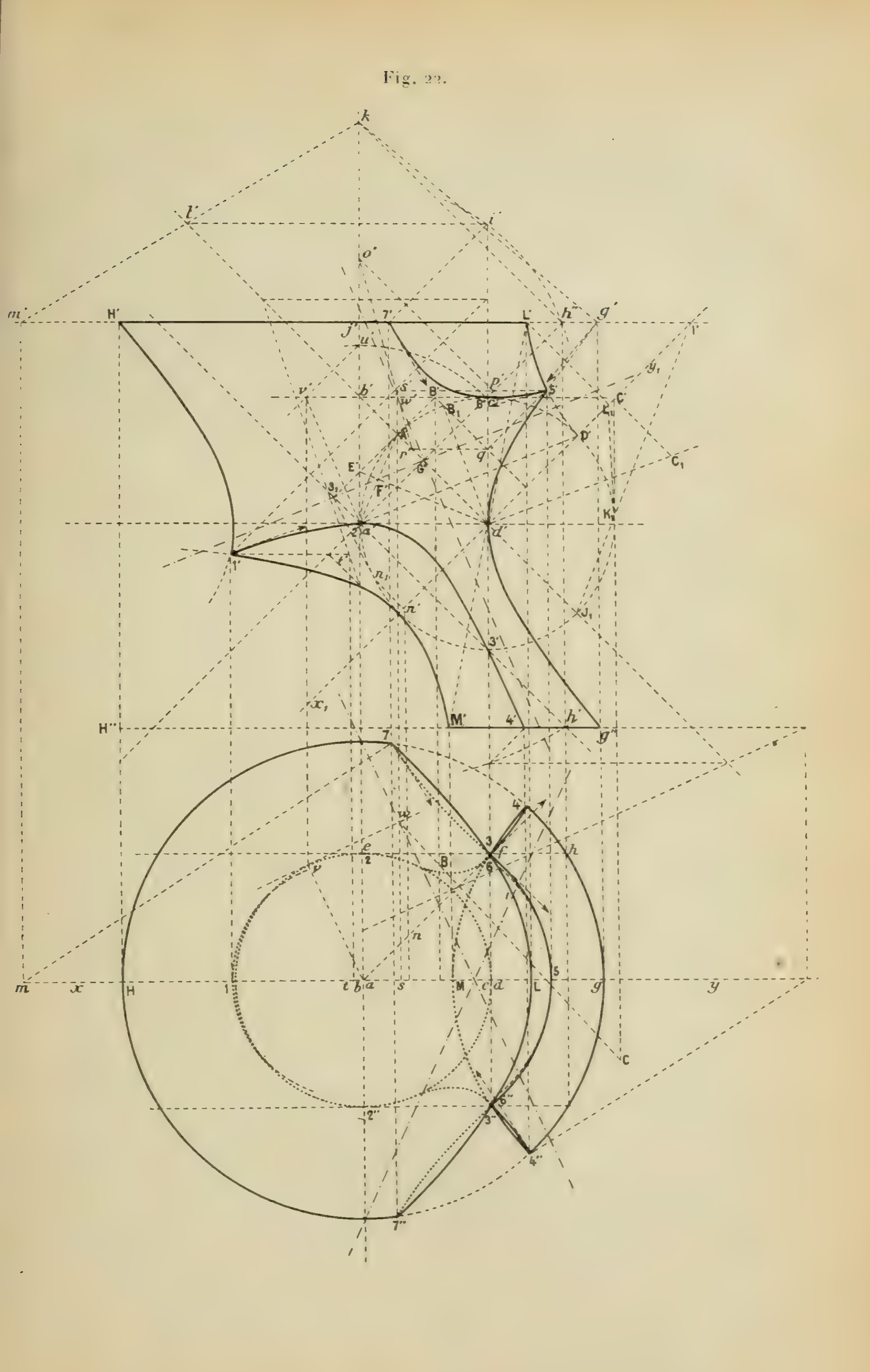
La seconde direction asymptotique de la projection verticale s'obtient en prenant le deuxième parallèle d'intersection de l'un des cônes avec la sphère auxiliaire. Il est facile de voir que l'on obtiendrait ainsi la bissectrice intérieure $a'D'$ de l'angle $c'a'd'$, de même que $a'v'$ en était la bissectrice extérieure. En projection horizontale, les directions asymptotiques sont imaginaires, de sorte qu'en projection verticale, nous avons la direction asymptotique d'une branche virtuelle. Pour construire l'asymptote correspondante, nous appliquons la méthode générale du n° 10. Les diamètres conjugués par rapport à H et H' sont, en direction, respectivement symétriques de $a'D'$ par rapport à $a'c'$, soit $a'A'$ et par rapport à $d'a'$, soit $d'E'$. Ils se rencontrent en F' et la parallèle à $a'D'$ menée par ce point est la seconde asymptote cherchée.

En réalité, toutes ces constructions n'ont été faites qu'à titre d'exercice, car elles auraient pu être considérablement simplifiées, en remarquant que la projection verticale de la courbe est une hyperbole, dont on connaît un diamètre $a'c'$ et, par suite, le centre G'. En menant par ce centre les parallèles à $a'v'$ et $a'D'$, on aurait eu les asymptotes de la projection verticale. En utilisant le point ω' et la tangente $c\omega$, on aurait eu ensuite une asymptote en projection horizontale.

Jonction des points. — Nous avons maintenant assez d'éléments pour construire la courbe avec exactitude. On commence par la projection verticale, en utilisant ses asymptotes. Puis, on trace la projection horizontale, en s'aidant de la projection verticale pour la jonction des points.

Ponctuation. — En projection verticale, tout est vu, car la moitié du solide commun qui se trouve en avant de xy est entièrement vue.

Fig. 22.



k
l'
i'
o'
m'
H'
7'
L'
h''
g'
u
b'
v'
B'
p
5'
C'
B1
D'
q'
E'
F'
C1
K1
d'
1'
J1
3'
x1
H''
M'
4'
h'
g''
7
4
3
f
h
B
6
n
m
x
H
1
t
b
a
s
M
c
d
L
S
g
y
C
6''
2''
3''
4''
7''

En projection horizontale, tout est caché sur H, à part le parallèle supérieur. Mais, sur H', tout ce qui est à droite du plan asymptote 3 3'' est vu. (On s'en rend compte en coupant par des plans de profil. Les sections sont des paraboles dont la concavité est tournée vers le bas ou vers le haut, suivant que le plan sécant est à droite ou à gauche du plan asymptote. Comme la partie solide est précisément du côté de cette concavité, on en conclut que, dans le premier cas seulement, la parabole est vue.) Il en résulte que les arcs 6 5 6'', 3 4, 3'' 4'' sont vus. Il en est de même pour les arcs de parabole 3 4 et 3'' 4''. Quant à la parabole 7 L 7'' du plan supérieur, elle est évidemment vue en entier. L'arc de cercle 4 g 4'', bien que primitivement caché sur H, devient vu quand on enlève ce qui est extérieur à H'.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On considère le plan tangent en un point quelconque M d'une génératrice de front d'une surface gauche de révolution à axe vertical. Construire l'angle plan du dièdre formé par ce plan tangent et par le plan méridien de front. Vérifier, au moyen de cette construction, la formule de Chasles (t. II, n° 368) et calculer le paramètre de distribution. (Si R désigne le rayon du cercle de gorge et α l'angle des génératrices avec le plan horizontal, le paramètre de distribution est égal à R tang α.)

2. On donne trois droites A, B, G. Construire les points de raccordement des deux surfaces gauches engendrées par G en tournant successivement autour de A et de B. [Ce sont les points doubles de deux divisions homographiques (t. II, n° 146). On construira, par exemple, les homologues I et J' des points à l'infini, en prenant les points de contact du plan asymptote de chaque surface avec l'autre; puis, on construira deux points homologues quelconques, P et P', au moyen d'un plan tangent quelconque; il restera à construire les points M tels que $\overline{IM}.\overline{J'M} = \overline{IP}.\overline{J'P'}$, ce qui est un problème élémentaire classique.]

3. On donne une droite quelconque G et une droite de front A. On considère l'hyperboloïde H engendré par la rotation de G autour de A. Déterminer son cercle de gorge et sa méridienne principale. Construire la projection horizontale d'un point, connaissant sa projection verticale. Construire le contour apparent horizontal. Construire le point de contact d'un plan quelconque passant par G. (Le plus simple est de faire un changement de plan horizontal amenant A à être verticale. Pour la deuxième construction, on peut aussi utiliser une sphère auxiliaire

contenant le parallèle qui passe par les points cherchés (n° 48). Pour le contour apparent horizontal, chercher tout de suite le plan diamètral conjugué des cordes verticales, en utilisant les asymptotes de la méridienne principale. Pour la dernière question, utiliser le changement de plan; ou bien, remarquer que l'on connaît la direction de la normale, qui doit, en outre, s'appuyer sur G et A.)

4. On donne une surface gauche de révolution à axe vertical. Construire le parallèle de contact du cône circonscrit ayant pour sommet un point donné de l'axe. (Chercher le point de contact du plan tangent déterminé par ce point et par une génératrice quelconque, qu'on pourra prendre, par exemple, de front.)

5. Même question, l'axe étant seulement de front. (Même méthode, en faisant un changement de plan.)

6. On donne une surface gauche à axe vertical, une verticale A et une droite de bout B. Construire une droite tangente à la surface et s'appuyant sur A et sur B. (Intersection des plans tangents menés par A et par B.)

7. On donne deux droites A et B et un point P. Construire l'axe d'une surface gauche de révolution contenant ces deux droites et ce point. Faire l'épure en supposant A verticale et B de front. (Construire la génératrice G qui passe par P et s'appuie sur A et B, en M et N. L'axe doit se trouver dans le plan perpendiculaire à AMG, mené par la bissectrice de cet angle.)

8. Construire l'ombre propre d'une surface gauche à axe vertical, les rayons lumineux étant de front et inclinés à 45° sur le plan horizontal. On supposera successivement que l'angle au sommet du cône asymptote est 60°, 90°, 120°.

9. On donne une surface gauche de révolution, dont l'axe est vertical et dont le centre a pour coordonnées (— 50, 120, 150). Le rayon du cercle de gorge est 40 et l'angle des génératrices avec l'axe est 30°. On limite la surface aux plans horizontaux de cotes 20 et 150. La surface étant supposée opaque et éclairée par les rayons lumineux à 45° habituels, représenter son ombre, ainsi que l'ombre portée sur le plan horizontal. (*Cf.* Chap. V, Exercice résolu n° 3.)

10. On donne une surface gauche de révolution à axe de bout. Le centre a pour coordonnées (0, 120, 160). Le cercle de gorge a pour rayon 40 et les génératrices font 45° avec l'axe. On enlève toute la partie

de la surface qui se trouve au-dessus du plan tangent horizontal le plus élevé. En outre, on la limite aux plans de front d'éloignements 20 et 220. La surface étant supposée opaque et éclairée par les rayons lumineux à 45° habituels, la représenter, en figurant les ombres.

11. Une surface gauche de révolution a pour centre le point (0, 110, 100). Son axe est de front et fait 30° avec la verticale; ses génératrices font 60° avec cet axe. Le rayon du cercle de gorge est 40. Un cube concentrique à l'hyperboloïde a une face dans le plan horizontal; une diagonale de cette face est de bout. L'hyperboloïde étant supposé solide dans la région qui contient l'axe, représenter la partie de ce solide qui est intérieure au cube.

12. Une surface gauche de révolution a son axe vertical. Son centre a pour coordonnées (0, 105, 85). Son cercle de gorge et sa trace horizontale ont pour rayons 8 et 95. On considère les quatre sphères dont les centres sont dans le plan de gorge et qui sont tangentes au plan horizontal aux extrémités des diamètres de front et de bout du parallèle situé dans ce plan. Représenter les parties de la surface de l'hyperboloïde intérieures aux quatre sphères et comprises entre les plans horizontaux de cotes 0 et 171. (E. C., 1882.)

13. Une surface gauche de révolution a son axe parallèle à la ligne de terre. Son centre a pour coordonnées (0, 100, 100). Son cercle de gorge a pour rayon 30 et ses génératrices font 45° avec l'axe. Un cylindre de révolution, de rayon 60, a pour axe la droite joignant les points (— 20, 100, 100) et (0, 100, 60). Représenter l'hyperboloïde entaillé par le cylindre, en le limitant aux plans de profil passant à 100 de part et d'autre du centre.

14. Une surface gauche de révolution a son axe vertical. Son centre a pour coordonnées (0, 150, 120). Son cercle de gorge a pour rayon 40 et ses génératrices font 54° avec le plan horizontal. On prend la sphère nscrite le long du parallèle de cote 140, puis un cône circonscrit à cette sphère, ayant pour angle au sommet 60° et dont le sommet a pour cote 150 et se trouve dans un plan méridien de l'hyperboloïde faisant 30° avec le plan vertical. Solide commun.

15. On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical, de centre (0, 51, 70). Le cercle de gorge a pour rayon 13 et les génératrices font 45° avec l'axe. On considère la génératrice de front de plus grand éloignement et dont la trace horizontale est à gauche du point de rencontre avec le cercle de gorge. On prend sur cette génératrice un point A, de cote 16

et un point B, de cote 140. Un deuxième hyperboloïde se raccorde au premier en ces deux points. Son axe est de front; il a deux génératrices verticales; enfin, l'angle au sommet du cône asymptote est 135°. Représenter le solide commun, en le limitant aux deux plans de projection.

16. Un cube, de 150 de côté, a des arêtes verticales et des arêtes de bout. Dans la face postérieure, on considère l'arête de gauche, l'arête inférieure et le sommet situé à l'intersection des deux autres arêtes. La diagonale du cube issue de ce sommet engendre, en tournant successivement autour des deux arêtes considérées, deux hyperboloïdes. Représenter le solide commun, en le limitant aux faces du cube (E. P., 1890). (L'intersection se compose de deux droites et d'une hyperbole.)

17. Un hyperboloïde de révolution à axe vertical a pour centre le point (0.80,65). Son cercle de gorge a pour rayon 40 et sa trace horizontale est tangente à la ligne de terre. On le limite au plan horizontal de cote 120. Soit G la génératrice dont la projection horizontale fait 30° avec la ligne de terre et dont la trace horizontale est à gauche et en avant de la trace de l'axe. Un cylindre a ses génératrices parallèles à G et a pour base, dans le plan de gorge, un cercle passant par le centre de l'hyperboloïde, de rayon 55 et dont le centre est à droite et à 8 en avant du centre de l'hyperboloïde. Hyperboloïde entaillé par le cylindre.

18. Un hyperboloïde à axe vertical a pour centre (—70.80.140). Son cercle de gorge a pour rayon 70 et ses génératrices font 40° avec l'axe. Un cône a pour sommet (—140, 150, 140) et pour base, dans le plan méridien de front de l'hyperboloïde, un cercle égal au cercle de gorge et dont le centre est au point le plus à droite de ce dernier. Représenter le cône entaillé par l'hyperboloïde, en le limitant au plan de front d'éloignement 10.

19. On considère un hyperboloïde H, à axe vertical, de centre (0.100.90) et dont une génératrice G a pour équations : $y = 70$, $z = 2x$. Un second hyperboloïde de révolution H′ se raccorde à H le long de G; son cercle de gorge est double de celui de H et se trouve du même côté par rapport au plan de front qui passe par G. Représenter le solide commun aux deux hyperboloïdes, en le limitant aux plans horizontaux de cotes 0 et 220. [On démontrera que tous les hyperboloïdes de révolution qui se raccordent à H le long de G ont pour axes les génératrices du second système du paraboloïde des normales (t. II. Chap. XXVI, Exercice proposé n° 4). Il faut prendre celle de ces génératrices dont l'éloignement est 130. L'intersection des deux hyperboloïdes se compose de G et de deux autres génératrices (t. II, n° 491, IV, *d*).]

20. Soient G et G′ deux génératrices quelconques de même système d'une surface gauche de révolution. Démontrer qu'elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport au diamètre du cercle de gorge perpendiculaire à la corde joignant leurs points de rencontre avec ce cercle. Réciproquement, il existe une infinité d'hyperboloïdes de révolution contenant deux droites données G et G′, ne se rencontrant pas. On obtient l'un quelconque d'entre eux en prenant comme plan de gorge un plan quelconque passant par un des axes de symétrie des droites données, l'axe de révolution s'en déduisant ensuite par une construction évidente. Quel est le lieu de cet axe ?

(On peut passer de G à G′ de la manière suivante : Une symétrie par rapport au plan de gorge donne une génératrice G″ du second système, rencontrant, par conséquent G′ en un certain point P. Une symétrie par rapport au plan méridien du point P transforme ensuite G″ en G′. Or, l'ensemble de ces deux symétries équivaut, comme on sait, à une symétrie par rapport à l'intersection des deux plans.

Pour la réciproque, soient M et M′ les points de rencontre du plan de gorge choisi avec G et G′. La perpendiculaire à G, menée par M dans le plan de gorge rencontre la perpendiculaire à G′ menée par M′ en un certain point O. L'axe de révolution A est la perpendiculaire au plan de gorge menée par O. Il est facile de voir que OM = OM′ et que, par conséquent, la surface gauche engendrée par la rotation de G autour de A passe par M′. Mais alors, la génératrice de cet hyperboloïde issue de M′ et de même système que G peut être déduite de G par la même symétrie qui transforme G en G′; donc, elle coïncide avec G′.

Le point O et le point à l'infini de A décrivent des divisions homographiques; on en conclut que le lieu de A est un paraboloïde hyperbolique équilatère, dont les génératrices issues du sommet sont les deux axes de symétrie de l'ensemble des deux droites G et G′. [Ce paraboloïde n'est autre que le lieu des points équidistants de G et de G′ (*cf.* t. II, Chap. V, Exercice proposé n° 18). Rappelons que les deux axes de symétrie en question sont les bissectrices des parallèles à G et à G′ menées par le milieu de la perpendiculaire commune, de sorte que cette perpendiculaire est l'axe du paraboloïde.]

21. Par le point (o.40.15), on mène la droite A de paramètres directeurs (1.2.1). Par le point (o.40.75), on mène la droite B de paramètres directeurs (1.—2.1). On considère deux hyperboloïdes de révolution H et H′ passant par ces deux droites et ayant respectivement pour axes, le premier une verticale, le second une droite de paramètres directeurs (3.o.1). Représenter H entaillé par H′, en le limitant au plan horizontal et au plan symétrique par rapport au plan de gorge. [Pour la détermi-

nation des deux axes, voir l'exercice précédent. L'intersection se compose des droites données et de deux génératrices de l'autre système (*cf.* t. II, n° 491, IV, *c*). On peut avoir celles-ci en cherchant les points de raccordement ou bien en cherchant leurs directions, par l'intersection de deux cônes concentriques parallèles aux cônes asymptotes.]

22. On fait tourner une même droite successivement autour de deux axes verticaux. Construire l'intersection des deux surfaces engendrées. Cas où le plan des axes est parallèle à la droite. (L'intersection comprend la droite donnée, une conique à l'infini et une autre droite.)

CHAPITRE VII.

QUADRIQUES QUELCONQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On considère l'hyperboloïde défini par les trois génératrices* (A, A′), (B, B′), (C, C′). *On le limite aux plans horizontaux passant respectivement par les points de rencontre des projections verticales* B′, C′ et B′, A′. *On le limite également au plan vertical de projection, la ligne de terre étant la trace verticale du premier des plans horizontaux précédents. Enfin, on l'éclaire par des rayons lumineux parallèles à la ligne de terre et venant de gauche. Représenter ce solide, avec son ombre propre* (*fig.* 23).

Centre et cône asymptote. — Construisons les génératrices parallèles aux proposées. La génératrice parallèle à (A, A′) doit rencontrer (B, B′); comme les deux droites sont de front, leurs projections horizontales A_1 et B sont confondues. La génératrice cherchée doit, en outre, rencontrer (C, C′). Le point de rencontre est (z,o'). Les données sont telles que o' se trouve juste à l'intersection de A′ et de C′. Il en résulte que A'_1 se confond avec A′. Le plan de bout qui admet pour trace verticale cette droite est donc un plan asymptote; sa génératrice de contact avec le cône asymptote est projetée horizontalement en *od*, à égale distance de A et de A_1.

La génératrice parallèle à (B, B′) a sa projection horizontale B_1 confondue avec A. Cette projection rencontre C en un point qui est en dehors des limites de l'épure, mais qui est symétrique de la trace horizontale *c* de (C, C′) par rapport à z, parce que cette trace a été prise sur la symétrique de A par rapport à B.

La projection verticale B'_1 doit donc rencontrer C′ en un point symétrique de c' par rapport à o'; comme elle doit être, en outre, parallèle à B′, ce n'est autre que la droite symétrique de B′ par rapport à o'. La droite (*oe*, $o'e'$) équidistante de (B, B′) et de (B_1, B'_1) est une nouvelle génératrice du cône asymptote. Le sommet de ce cône, c'est-à-dire le centre de l'hyperboloïde, est, par suite, (o, o').

La génératrice (C_1, C'_1) est maintenant facile à obtenir; c'est la droite symétrique de (C, C') par rapport à (o, o'). Le plan asymptote correspondant est encore de bout, puisque C'_1 et C' sont confondues. Sa génératrice de contact avec le cône asymptote est $(of, o'b')$.

Le cône asymptote est maintenant connu par trois plans tangents avec leurs génératrices de contact. La trace horizontale de ce cône est déterminée par trois points et les tangentes en ces points, à savoir d, de tangente aa_1; e, de tangente bb_1; f, de tangente bc. La première et la troisième tangente sont de bout; la deuxième est parallèle à B', parce que le triangle bOb_1 peut se déduire de $b'O'b''_1$ par une translation, la différence des éloignements de A et de B ayant été prise juste égale à la différence des cotes de b' et de b''_1. Ajoutons que A' et B' sont inclinées à 45° sur la ligne de terre, toujours par hypothèse. On en conclut que le triangle rectangle bOb_1 est isoscèle et, par suite, que sa médiane Oe est en même temps hauteur. D'autre part, df est le diamètre conjugué des cordes de bout; comme $O'a' = O'b'$, O est le milieu de ce diamètre, c'est-à-dire le centre de la conique. Il suit de là que Oe est le diamètre conjugué des cordes parallèles à bb_1; comme on vient de démontrer que ces deux directions sont perpendiculaires, on en conclut que Oe *est un axe*.

Il serait évidemment facile maintenant d'achever la construction de la base du cône asymptote; mais, comme cette base n'est pas utile pour la représentation de l'hyperboloïde, nous ne la construirons pas.

Trace horizontale de l'hyperboloïde. — Nous en connaissons immédiatement cinq points, qui sont les traces horizontales a, a_1, b, b_1, c des six génératrices construites. [Les traces de (B, B') et de (C_1, C'_1) se confondent en b; par contre, on aurait facilement la tangente en ce point, en prenant la trace horizontale du plan des deux génératrices. En coupant par le plan horizontal b''_1h', on vérifie que cette tangente est parallèle à Oh_1 ou Oo; ce qui résulte d'ailleurs aussi de ce que Oo est diamètre conjugué des cordes de front par rapport à la trace du cône asymptote, puisque o est au milieu de de.]

Pour en effectuer rapidement le tracé, rappelons-nous qu'elle est homothétique et concentrique à la trace du cône asymptote. Le diamètre aOc, étant perpendiculaire à l'axe Oe de cette deuxième conique, est un axe de la conique que nous avons présentement à construire. Pour avoir le deuxième, cherchons le point E homologue de e. A cet effet, cherchons le point g où la trace du cône asymptote rencontre Ob. La polaire de b par rapport à cette trace étant ef, on doit avoir

$$Og^2 = OK.Ob = \frac{3}{2}a.2a = 3a^2,$$

en appelant a la distance $OL = Lb = 2LK$. Donc, Og est la hauteur du triangle équilatéral de côté Ob. Construisons cette longueur, reportons-la en Og; puis, menons, par b, la parallèle bE à ge; nous obtenons le sommet E cherché.

Nous connaissons maintenant l'ellipse par ses deux axes et nous la construisons à l'aide du procédé de la bande de papier.

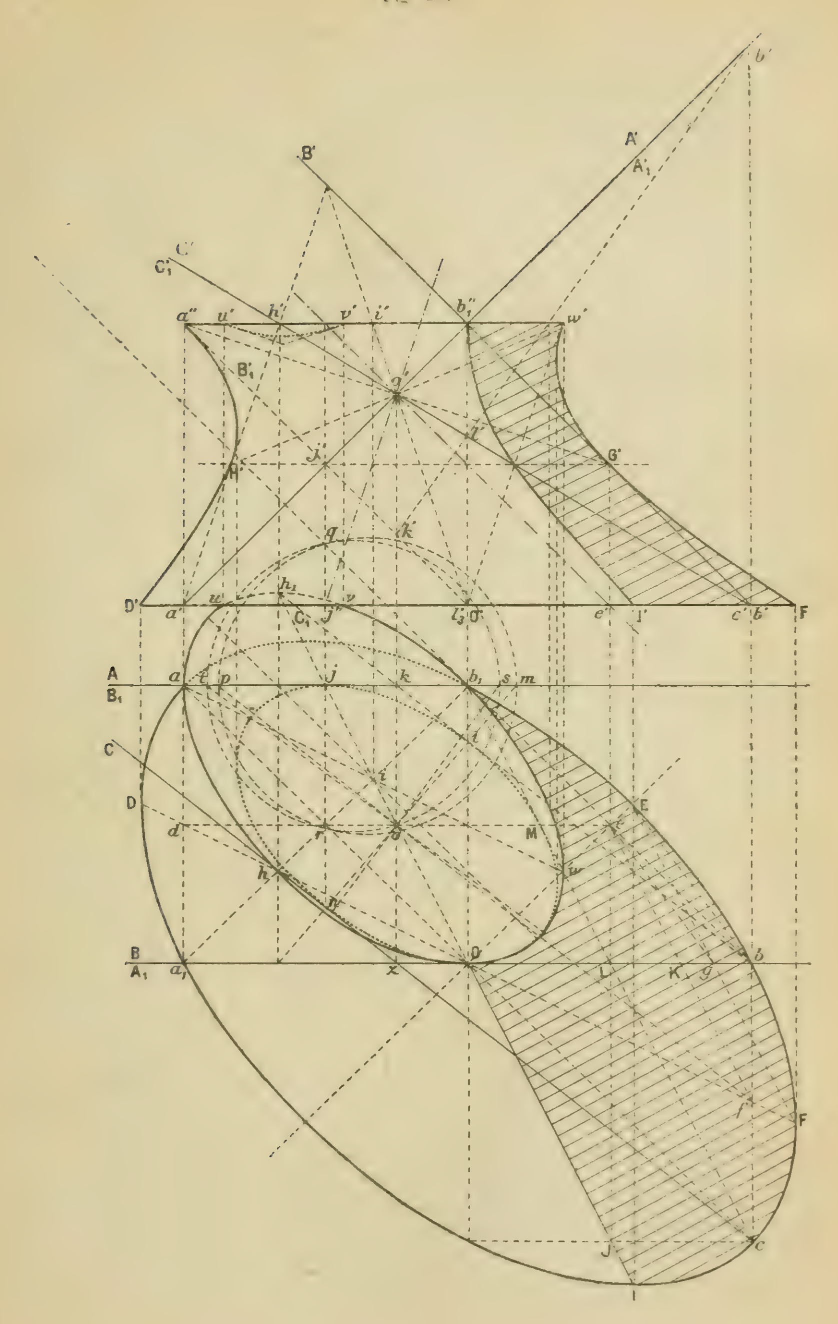
Trace sur le plan horizontal supérieur. — C'est une ellipse homothétique de la précédente. Nous en avons cinq points, en prenant les traces des génératrices connues, soit b_1, O, h, a, h_1. Le centre i est la trace du diamètre oO conjugué des plans horizontaux par rapport à l'hyperboloïde. Le demi-diamètre iO étant homologue du demi-diamètre OI, nous en déduisons le rapport d'homothétie. Nous pouvons ensuite construire les axes de la nouvelle ellipse, puis, cette ellipse elle-même par la bande de papier. Observons d'ailleurs que hb_1 est le petit axe. On peut le prouver par des considérations élémentaires, en démontrant que c'est un diamètre parallèle à OE. On peut aussi chercher la tangente en b_1, au moyen du plan tangent en (b_1, b''_1) à l'hyperboloïde. Ce plan tangent est déterminé par la génératrice (A, A') et par la génératrice (b_1c, b''_1c'); sa trace horizontale est ac; donc, la tangente en b_1 est parallèle à la tangente en E et b_1 peut être considéré comme le sommet homologue de E. De même, le plan tangent en (h, h') contient (C, C') et $(ha, h'a')$; sa trace horizontale est encore ca et l'on en conclut que h est le sommet opposé à b_1.

On peut démontrer, de même, que la tangente en O est de front, car les deux génératrices issues de (O, b''_1) sont (A_1, A'_1) et (B, B'), dont le plan est de front, et que la tangente en a est de bout, car le plan tangent en (a, a'') est de bout, ainsi que nous le verrons dans un instant.

Trace verticale. — Le plan de front mené par (o, o') coupe le cône asymptote suivant deux génératrices, de traces horizontales d et e et de projections verticales $o'a'$ et $o'e'$. Les plans asymptotes correspondants ont pour traces horizontales respectives da et eb; leurs traces verticales sont $a'o'$ et eb_1 prolongée. La trace verticale de l'hyperboloïde est donc une hyperbole équilatère dont $a'o'$ et eb_1 sont les asymptotes. En prenant les points de rencontre (u, u') et (v, v') de l'ellipse horizontale supérieure avec le plan vertical, on a deux points de cette hyperbole. Un très petit arc seulement est compris entre les plans horizontaux limites. Pour le construire, il suffit pratiquement de tracer les tangentes en ses extrémités u' et v', ce qui peut se faire en se servant des asymptotes.

Contour apparent horizontal. — Le plan de front A est tangent à l'hyperboloïde au point (j, j') de rencontre des génératrices (A, A')

Fig. 23.


A'
A'1
B'
C'
C'1
b'
a''
u'
h'
v'
i'
b''1
w'
B'1
o'
l'
J'
H'
G'
q
k'
h1
D'
a'
u
C1
J''
v
e'
I'
c'
b'
F
A
B1
a
t
p
j
k
b1
s
m
C
D
d
r
o
M
E
h
w
B
A1
a1
x
O
L
K
g
b
f
F
J
c
I

et (B_1, B'_1). Le contour apparent horizontal est donc tangent en j à A. On voit de même qu'il est tangent en O à B.

Le plan projetant horizontalement (C_1, C'_1) rencontre (A_1, A'_1) en (b, b'') et (B_1, B'_1) en (k, k'); il coupe donc la surface suivant la génératrice (kb, $k'b''$), qui rencontre (C_1, C'_1) en (l, l'). Le contour apparent horizontal est tangent en l à C_1. Il est tangent à C au point n symétrique de l par rapport à o.

Il est facile, d'après tous ces renseignements, de voir que ce contour apparent est une ellipse, ce qui résulte d'ailleurs aussi de ce que le contour apparent du cône asymptote est imaginaire (puisque o est intérieur à la base). Nous connaissons un diamètre jO de cette ellipse et les tangentes aux extrémités de ce diamètre. Nous connaissons, en outre, les directions de deux diamètres conjugués, à savoir ol et la parallèle op à C. Il nous est facile, avec ces données, de construire les axes. On sait, en effet, (t. II, Chap. XXX, Exercice proposé n° 15) que, si s et t sont leurs points de rencontre avec la tangente en j, les produits $\overline{js}.\overline{jt}$ et $\overline{jm}.\overline{jp}$ sont tous deux égaux au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente. Dès lors, nous décrivons un cercle de diamètre mp; il rencontre la normale en j aux points q, r, par lesquels nous menons ensuite un cercle passant par o; ce cercle coupe A aux points s et t; os et ot sont les axes cherchés. On sait d'ailleurs (n° 142) que les longueurs des demi-axes ont pour somme et différence les distances oq et or; on en déduit facilement ces longueurs. On achève alors la construction de l'ellipse au moyen de la bande de papier. (La longueur jq est celle du demi-diamètre parallèle à la ligne de terre. On aurait pu construire directement l'extrémité M de ce diamètre en prenant le point de contact de la droite b_1c, qui est parallèle au diamètre conjugué Oj et qui est, en outre, ainsi que nous l'avons vu plus haut, la projection horizontale d'une génératrice.) [1].

Contour apparent vertical. — Les droites A′ et C′ sont les traces verticales de deux plans asymptotes de bout; ce sont donc les deux asymptotes du contour apparent vertical, lequel est, par suite, une hyperbole.

Le plan projetant verticalement (B, B′) coupe l'hyperboloïde suivant

---

[1] La projection de l'ellipse horizontale supérieure est surosculatrice en O au contour apparent. En effet, dans l'espace, la tangente en (O, b_1) à l'ellipse de contour apparent horizontal est parallèle à la ligne de terre : on peut le voir par des considérations élémentaires ou bien en remarquant que les verticales et la ligne de terre ont des directions conjuguées par rapport à l'hyperboloïde. Dès lors, les quatre points de rencontre des deux ellipses se confondent en O.

une deuxième génératrice, de projection horizontale b_1c, qui rencontre la première en (L, G′). Donc, G′ est le point de contact de B′ avec le contour apparent vertical. Le point a'' symétrique de G′ par rapport à o', est le point de contact de B'_1. Si l'on remarque maintenant que $O'o'$ est le diamètre conjugué des cordes horizontales, on en déduit les points H′ et w', avec leurs tangentes. Enfin, les projections verticales D′ et F′ des points D et F de la trace horizontale de la surface sont encore deux points du contour apparent vertical. On a maintenant plus d'éléments qu'il n'en faut pour construire cette courbe.

Ombre propre. — Le plan de la ligne d'ombre propre est le plan diamétral conjugué de la ligne de terre par rapport à l'hyperboloïde.

La trace horizontale de ce plan est le diamètre conjugué $O\sigma$ par rapport à la trace horizontale de la surface. Comme le plan doit passer par le centre (o, o') et comme, d'autre part, la projection horizontale de ce centre est sur la trace horizontale du dit plan, il s'ensuit nécessairement que ce plan est vertical.

La projection horizontale de la courbe d'ombre propre est donc le diamètre Oo. Quant à sa projection verticale, c'est une hyperbole, dont les asymptotes sont les projections verticales $o'j''$ et $o'e'$ des génératrices d'ombre propre du cône asymptote. Au point (O, b''_1), le plan tangent est de front, donc parallèle à la ligne de terre. Il en résulte que ce point appartient à la ligne d'ombre et que la tangente y est verticale. Nous avons aussi le point (I, I′), qui est le point de la trace horizontale de la surface où la tangente est parallèle à la ligne de terre. Nous possédons maintenant plus d'éléments qu'il n'en faut pour construire l'arc d'hyperbole b''_1I′.

Ponctuation. — En projection horizontale, l'ellipse supérieure est entièrement vue. L'ellipse inférieure n'est vue qu'à l'extérieur de l'ellipse supérieure. Quant à l'ellipse de contour apparent, elle est entièrement cachée, comme il arrive toujours pour un hyperboloïde à une nappe, lorsqu'on suppose que la partie solide comprend l'intérieur de l'ellipse principale. Enfin, la courbe d'ombre propre n'est vue que de I en O.

En projection verticale, le contour apparent est vu, ainsi que l'arc d'hyperbole b''_1I′ (l'autre branche est entièrement cachée et, pour cette raison, n'a pas été tracée). Le petit arc $u'v'$ est évidemment caché.

Le point (b, b'), par exemple, est dans l'ombre. Toute la région qui le contient doit donc être couverte de hachures.

2. *Un paraboloïde hyperbolique est défini par les deux génératrices* (A, A′) *et* (B, B′) *et par un plan directeur horizontal. Un ellipsoïde*

admet pour centre le sommet du paraboloïde; son grand axe, de longueur 80, se trouve sur une génératrice horizontale du paraboloïde; son axe moyen, également horizontal, a pour longueur 60; enfin, son petit axe a pour longueur 50. Le paraboloïde étant supposé solide dans la région qui contient la demi-droite de bout issue du sommet et dirigée en avant de ce point, représenter l'ellipsoïde entaillé par le paraboloïde (fig. 24).

Détermination du sommet du paraboloïde. — Cherchons d'abord la direction de l'axe, par l'intersection des plans directeurs. A cet effet, menons, par le point (a, a') de (B, B'), la parallèle (A_1, A') à (A, A') et coupons le plan $(BaA_1, B'a'A')$ par le plan horizontal H'. Nous obtenons, en bc, la direction de l'axe.

Cherchons maintenant les génératrices perpendiculaires à cette direction. Celle du premier système (nous convenons d'appeler génératrices du premier système les génératrices horizontales) a pour direction $(cd, c'b')$, la droite cd étant menée perpendiculairement à cb. D'autre part, elle doit s'appuyer à la fois sur (A, A') et sur (B, B'). Cherchons la trace de (A, A') sur le plan $(Bcd, B'c'b')$. En coupant par le plan projetant verticalement cette droite, nous obtenons le point (e, e'). En menant, par ce point, la parallèle à $(cd, c'b')$, nous obtenons la génératrice cherchée.

La génératrice du second système est parallèle à l'intersection $(cf, c'f')$ du second plan directeur $(BA_1, B'A')$ avec le plan vertical de trace cd. D'autre part, les projections verticales de toutes les génératrices du second système passent par un point fixe, trace verticale de la génératrice de bout du premier système. Ce point fixe n'est autre que a', intersection de A' et de B'. En menant $a's'$ parallèle à $c'f'$, nous avons la projection verticale de la seconde génératrice cherchée. Son point de rencontre avec la première nous donne le sommet (s, s') du paraboloïde.

Contour apparent horizontal du paraboloïde. — Les verticales étant perpendiculaires à l'axe du paraboloïde, leur plan diamétral conjugué contient cet axe. Il en résulte que le contour apparent horizontal est une parabole ayant pour sommet s et pour axe sX perpendiculaire à se. Comme elle est l'enveloppe des projections horizontales des génératrices, B est une de ses tangentes. En menant une perpendiculaire à cette droite en son point de rencontre g avec la tangente au sommet, puis prenant l'intersection de cette perpendiculaire avec sX, on a le foyer F de la parabole. On peut, dès lors, la tracer sans difficulté. On a déterminé, en particulier, le point de contact h de B, en menant la parallèle à l'axe

par le symétrique de F par rapport à g. On a construit, de même, le point de contact i de la génératrice de bout $a'a$.

Le contour apparent vertical du paraboloïde se réduit au point a' (n° 89).

Contours apparents de l'ellipsoïde. — En portant la longueur 40, de part et d'autre de s, sur se, on a les deux sommets P et Q du grand axe, En portant, de même, la longueur 30 sur sX, on a les sommets R et S de l'axe moyen. Enfin, les sommets du petit axe ont pour projections verticales U′ et V′, à la distance 25 de s'.

Le contour apparent horizontal est l'ellipse principale d'axes PQ et RS. Le contour apparent vertical est une ellipse de petit axe U′V′ et de grand axe $j'k'$, j' et k' étant les projections verticales des points j et k de l'ellipse principale, où la tangente est de bout.

Construction de l'intersection. — Pour avoir un *point quelconque*, coupons par le plan horizontal H′. Il coupe le paraboloïde suivant la génératrice du premier système (H, H′). Il coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse homothétique de l'ellipse principale horizontale. Le rapport d'homothétie est le rapport des cordes déterminées par les plans horizontaux H′ et $s'j'$ sur l'ellipse de section de l'ellipsoïde par un plan quelconque passant par l'axe vertical. Or, on peut choisir ce plan, de manière que l'ellipse en question se projette verticalement suivant un cercle de diamètre U′V′. Le rapport d'homothétie est donc $\frac{n'm'}{s'o'}$. Effectuons sur H l'homothétie inverse. A cet effet, construisons le point homologue (o, o') de (m, m') et menons par o la parallèle à H. Elle rencontre l'ellipse principale aux points p et q. En joignant sp, nous obtenons, en 11, la projection horizontale d'un des points cherchés; une ligne de rappel nous donne sa projection verticale 11′, sur H′. Du point q, on déduit, de même, (17, 17′).

Observons maintenant que sX est un *axe de symétrie* pour les deux surfaces, donc pour leur intersection. Des deux points précédents, nous pouvons donc déduire aisément deux autres points (2, 2′) et (8, 8′). Par exemple, pour construire le second, nous prenons d'abord le symétrique 8 de 17 par rapport à sX (parce que l'axe est horizontal; sX est donc un *axe de symétrie de la projection horizontale*). Nous menons la ligne de rappel 8 8′ et nous y choisissons 8′ de manière que sa cote par rapport à la projection verticale $s'k'$, soit égale à la cote de 17′, mais de sens contraire.

Points remarquables. — Nous avons d'abord les sommets (1, 1′) et (9, 9′) de l'ellipsoïde, qui sont les points sur le contour apparent hori-

zontal de cette surface. Il est facile de construire les tangentes en ces points à la projection verticale. Cherchons, par exemple, la tangente en $9'$. Le plan tangent à l'ellipsoïde est le plan vertical de trace Pt. Pour avoir le plan tangent au paraboloïde, cherchons la génératrice du second système qui passe par $(9, 9')$. La projection verticale de cette génératrice est $a'9'$. Son point de rencontre avec la génératrice du premier système (H, H') est (r, r'), Coupons dès lors nos deux plans tangents par le plan horizontal H'. Le premier est coupé suivant une droite de projection horizontale Pt. Le second est coupé suivant une droite passant par (r, r') et parallèle à la génératrice $(s9, s'9')$, qui appartient à ce plan. En menant par r la parallèle rt à Ps, on a la projection horizontale t d'un point de la tangente dans l'espace. La projection verticale de ce point se trouve ensuite en t', sur H'. La tangente cherchée est finalement $9't'$.

La tangente en $1'$ pourrait se construire de la même manière. Il est plus simple de remarquer qu'elle est symétrique de la précédente par rapport à l'axe de symétrie de la courbe. On construit, comme il a été expliqué tout à l'heure, le point symétrique de (t, t'); puis, on joint sa projection verticale à $1'$.

Cherchons maintenant les points de rencontre de la génératrice $(sP, s'a')$ avec l'ellipsoïde. A cet effet, nous coupons par le plan projetant horizontalement cette droite et nous rabattons sur le plan principal horizontal. Le point (u, a') se rabat en u_1. Il faut construire les points de rencontre de su_1 avec le rabattement de l'ellipse de sommets P, Q, U', V'. A cet effet, nous utilisons le rabattement du cercle homographique et le rabattement U_1 de (s, U'). Joignons U_1u_1; cette droite rencontre PQ en E, que nous joignons à Y_1; EY_1 rencontre uu_1 en y_1; sy_1 rencontre le cercle homographiqne en z_1; le rabattement d'un des points cherchés se trouve sur la perpendiculaire abaissée de z_1 sur PQ (t. II, n° 539). Mais, nous n'avons pas besoin de ce rabattement, car le pied 6 de ladite perpendiculaire sur PQ est la projection horizontale du point, qui se rappelle ensuite, en $6'$, sur $s'a'$.

Cherchons la tangente. Le plan tangent au paraboloïde est déterminé par les génératrices $(6s, 6's')$ et $(6v, 6'v')$. Le plan tangent à l'ellipsoïde est le plan perpendiculaire au plan vertical PQ, mené par la tangente $(w6, w'6')$ à l'ellipse principale située dans ledit plan vertical. Coupons ces deux plans par le plan horizontal $a'W'$. Le premier est coupé suivant une droite dont la projection horizontale passe par u et est parallèle à $6v$. Le second est coupé suivant une droite dont la projection horizontale est perpendiculaire à PQ et passe par W, projection horizontale du point de rencontre du plan auxiliaire avec $(6w, 6'w')$. Ces deux droites

se rencontrent au point (G, G'), qui est un point de la tangente cherchée.

Par symétrie, on construit ensuite le point $(14, 14')$ et sa tangente. Cherchons les points situés sur la génératrice de bout. Nous appliquons la même méthode que pour le point courant, avec cette différence que nous ne pouvons pas effectuer l'homothétie sur la génératrice, en utilisant le point projeté verticalement en J', puisque ce point n'existe pas. Nous avons la nouvelle abscisse $s'K'$, en joignant a' au point de rencontre C' de $s'I'$ avec $J'e''$. En menant la ligne de rappel du point K', prenant ses points de rencontre K et L avec l'ellipse principale, puis faisant l'homothétie inverse, par la simple jonction de Ks et de Ls, nous obtenons, en 7 et 3, les projections horizontales des points cherchés, dont la projection verticale commune est a'.

Ce point a' est donc un point double apparent (n° 8) en projection verticale. Il est facile d'avoir ses tangentes. Ce sont, en effet, les traces des plans tangents au paraboloïde en $(3, 3')$ et $(7, 7')$, puisque ces plans sont de bout, comme contenant la génératrice de bout. Cherchons, par exemple, le plan tangent en $(3, 3')$. Il nous faut la génératrice du second système issue de ce point. Coupons par le plan déterminé par le point et par la génératrice du premier système (H, H'). Il rencontre la génératrice du premier système $(PQ, 9'1')$ au point (T, T'), construit au moyen de l'horizontale DT du plan auxiliaire. Ce point appartient à la génératrice cherchée, donc au plan tangent; il en résulte que la tangente à la branche $2'3'4'$ est $3'T'$. On construit de même la tangente $7'T'_1$ à l'autre branche.

Il nous reste à chercher les *points sur les contours apparents*. On peut avoir assez aisément les points sur le contour apparent horizontal du paraboloïde, en coupant par le plan de cette ligne. Ce plan est déterminé par l'axe sX et par le milieu de la corde verticale du paraboloïde qui a pour trace horizontale le point u par exemple. Il coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse, dont deux sommets sont R et S, les deux autres se trouvant à l'intersection du plan avec l'ellipse principale de projection horizontale PQ. Pour construire ces derniers, on utilise le rabattement effectué pour la construction du point $(6, 6')$. Le rabattement de la trace du plan sécant sur le plan de l'ellipse est la droite joignant s au milieu de uu_1. Après la transformation qui substitue à l'ellipse son cercle homographique, elle passe par le milieu de uv_1 et coupe le cercle homographique en deux points, qui se projettent ensuite orthogonalement sur PQ aux projections horizontales des sommets cherchés. Il ne reste plus ensuite qu'à prendre l'intersection de l'ellipse admettant pour sommets ces points, en même temps que R et S, avec la parabole de contour apparent du paraboloïde. Cette construction pourrait se faire à la

règle et au compas, parce que les deux coniques ont un axe commun. Pratiquement, on peut substituer à l'ellipse son cercle de courbure en un des sommets de PQ. On obtient ainsi un point très voisin du point 7 (sur l'arc 6 7). Ces constructions n'ont pas été reportées sur la figure, pour ne pas trop l'embrouiller et aussi parce que, pratiquement, on peut très bien s'en passer pour faire le raccord entre la courbe et la parabole, vu la proximité du point 7 et de cette dernière courbe.

Les points sur le contour apparent horizontal de l'ellipsoïde sont 1 et 9. Quant aux points sur le contour apparent vertical, on ne peut les obtenir qu'en rappelant les points de rencontre 10, 5, 15 et 18 de la projection horizontale de la courbe avec la trace jsk du plan diamétral conjugué des cordes de bout.

Pour bien guider la courbe, on a construit les points symétriques de tous les points remarquables, comme il a été expliqué plus haut. On a également construit le point (13, 13′), en coupant par le plan horizontal de 15′, et son symétrique (4, 4′).

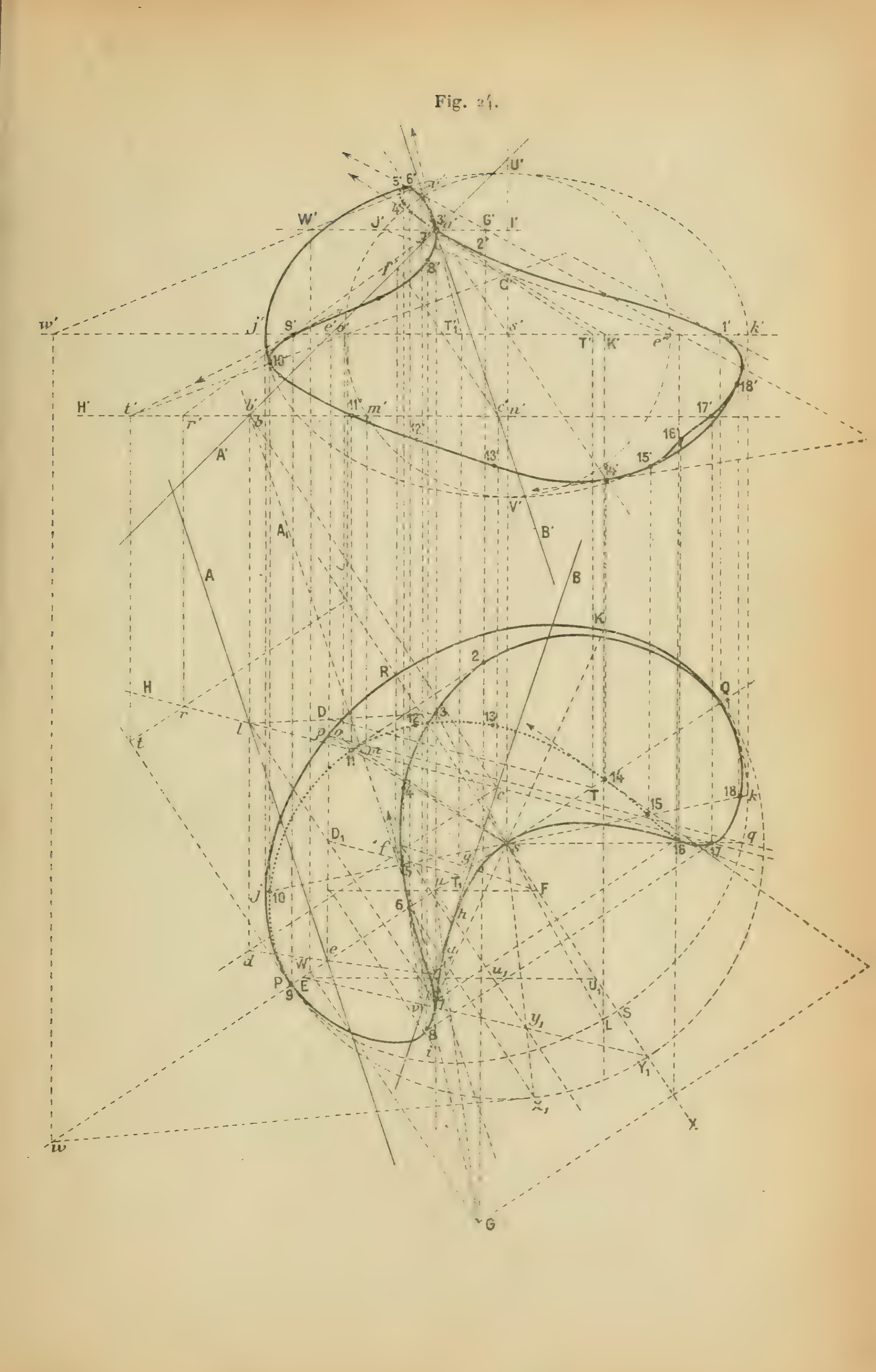
Jonction des points. — Il suffit d'imaginer un plan horizontal balayant l'ellipsoïde d'une manière continue. Il est facile de suivre le déplacement de ses deux points de rencontre avec la courbe, en prenant comme repères les points construits. Le numérotage de ceux-ci a été fait en partant du point (1, 1′) et déplaçant le plan horizontal d'abord vers le haut (jusqu'au point 5′), puis vers le bas (jusqu'au point 14′), puis vers le haut (jusqu'au retour en 1′).

Ponctuation. — Nous ponctuons d'abord sur l'ellipsoïde (n° 11, II). En projection horizontale, tout l'arc 12...9 est vu, parce qu'il est au-dessus du plan principal horizontal. En projection verticale, les arcs vus sont ceux qui sont en avant du plan vertical jsk, c'est-à-dire 5′6′...10′ et 15′16′17′18′.

Nous enlevons ensuite la portion de l'ellipsoïde intérieure au paraboloïde. La demi-ellipse de contour apparent horizontal PQS disparaît, ainsi que les arcs 18′k'U′5′ et 10′V′15′ du contour apparent vertical. Il en est de même du contour apparent horizontal du paraboloïde à l'exception de l'arc allant du sommet s aux points de contact avec la courbe d'intersection.

Si nous revenons maintenant à la ponctuation de cette dernière, nous découvrons plusieurs arcs qui, primitivement cachés, deviennent vus comme faisant partie du contour apparent. En projection horizontale, nous trouvons l'arc 1 18 17 16, jusqu'au point de contact avec la parabole. En projection verticale, nous avons 18′1′2′3′ et 10′ 11′...15′, de sorte que le petit arc 3′4′5′ est seul caché dans cette projection.

Fig. 24.



EXERCICES PROPOSÉS.

1. Un hyperboloïde à une nappe contient la ligne de terre, une verticale et une droite de bout données. Construire son centre et son cône asymptote. Connaissant une projection d'un de ses points, trouver l'autre. Construire sa section par un plan horizontal quelconque.

2. On donne un cube, ayant des arêtes verticales et des arêtes de bout, de longueur 150 et dont le centre a pour coordonnées (0,100,100). Un hyperboloïde contient deux diagonales non parallèles des faces de front et l'axe de bout de la face horizontale inférieure. Représenter la portion de cet hyperboloïde intérieure au cube, en la supposant éclairée par des rayons lumineux horizontaux, faisant 45° avec la ligne de terre.

3. Un hyperboloïde à une nappe a pour centre (0, 100, 100). Son ellipse principale a un axe parallèle à la ligne de terre et de longueur 100 et un axe de bout et de longueur 70. Ses génératrices de front font 45° avec le plan horizontal. Construire les deux projections de la ligne de striction des génératrices d'un système. (On sait construire le point central de chaque génératrice.)

4. On reprend l'hyperboloïde précédent et on le coupe par un paraboloïde hyperbolique, dont les génératrices issues du sommet sont les génératrices de l'hyperboloïde situées dans le plan tangent de front le plus rapproché du plan vertical et dont la parabole principale horizontale admet pour foyer le centre de l'hyperboloïde. L'hyperboloïde étant supposé solide dans la région qui contient son centre et le paraboloïde étant supposé solide dans la région qui ne contient pas ce point, représenter le solide commun, en le limitant aux plans horizontaux de cotes 30 et 170.

5. Un paraboloïde hyperbolique a pour axe la ligne de terre et pour plan principal le plan horizontal. On donne, en outre, son sommet, l'angle que font ses plans directeurs avec le plan horizontal et un de ses points.

Construire les génératrices qui passent par ce point.

6. Un paraboloïde hyperbolique est défini par les génératrices

$$y = 50, \qquad z = x + 100; \qquad y = 100,$$
$$z = -x + 100; \qquad y = 150, \qquad z = 0.$$

On le coupe par une sphère ayant pour centre son sommet et pour

rayon 100. Représenter cette sphère entaillée par le paraboloïde, en supposant que son point le plus haut se trouve dans la partie solide du paraboloïde.

7. Un ellipsoïde a pour centre (0, 100, 100), pour sommets (90, 130, 100) et (0, 100, 180). On sait, en outre, que les plans de front sont des plans cycliques. Dans le plan principal horizontal, on prend le point P, situé sur l'ellipsoïde, ayant pour abscisse 85 et le plus grand éloignement. On considère la sphère tangente en ce point à l'ellipsoïde et passant par le sommet de moindre éloignement. Représenter le solide commun. (On peut se ramener à l'intersection de la sphère et d'un cône à base circulaire dans le plan vertical.)

8. Un paraboloïde elliptique à axe vertical admet pour sommet le point (0, 100, 0); il passe, en outre, par l'ellipse horizontale qui admet pour centre (0, 100, 200), pour sommet le point A (120, 150, 200) et dont le petit axe a pour longueur 180. Un paraboloïde hyperbolique a un plan directeur horizontal et l'autre de front; il a même sommet que le paraboloïde elliptique; en outre, il passe par le point A. Représenter le solide commun, en supposant que la partie de l'axe du paraboloïde hyperbolique qui est à droite du sommet se trouve dans la région solide limitée par cette surface.

9. Un hyperboloïde à deux nappes a pour centre (0, 120, 0) et pour sommet (0, 120, 40). Sa section par le plan $z = 200$ est une ellipse dont le petit axe est de bout et a pour longueur 160 et dont le grand axe a pour longueur 260. On le coupe par un cylindre ayant pour base un cercle décrit dans le plan de l'ellipse ci-dessus, sur son petit axe comme diamètre. Les génératrices de ce cylindre sont de front et inclinées à 45° sur le plan horizontal. Représenter le solide commun, en le limitant au plan $z = 200$ et à la nappe supérieure de l'hyperboloïde.

10. Une surface gauche de révolution à axe vertical admet pour centre (0, 120, 100), pour rayon de gorge 40 et pour rayon de la trace horizontale 100. Un paraboloïde hyperbolique passe par une des génératrices de front de plus grand éloignement de cet hyperboloïde, par son axe et par la tangente au cercle de gorge au point le plus rapproché du plan vertical. Représenter l'hyperboloïde entaillé par le paraboloïde, en le limitant par les plans horizontaux de cotes 0 et 150.

CHAPITRE VIII.

PROJECTIONS COTÉES; SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Entre les sommets* S *et* S′ *de la carte* [1] *de la figure* 26, *se trouve un col* C. *Déterminer sa position approximative et tracer la ligne de faîte et la ligne de thalweg qui en sont issues.*

Menons la normale commune aux lignes de niveau de cote 210; nous obtenons un élément de la ligne de faîte; de même, en menant la normale commune aux lignes de niveau de cote 200, nous obtenons un élément de la ligne de thalweg. Ces deux lignes se rencontrent au point C, qui est le col cherché.

En appliquant la méthode indiquée au n° 96 pour la construction d'une ligne de plus grande pente, on peut continuer le tracé de la ligne de faîte, qui se termine aux deux sommets S et S′ et de la ligne de thalweg, qui descend indéfiniment et sort finalement des limites de la carte. A partir de la cote 160, le tracé de cette dernière ligne devient assez incertain, à cause du grand espacement des lignes de niveau. Il faut imaginer par la pensée des lignes de niveau intermédiaires et s'efforcer de les couper orthogonalement. On peut aussi se guider sur les lignes de plus grande pente voisines, qui doivent toutes converger asymptotiquement vers la ligne de thalweg (n° 99).

2. *On donne, sur la même carte, le point* A, *de cote* 153 *et le point* B, *de cote* 152. *Tracer un chemin joignant ces deux points et dont la pente ne dépasse jamais* 5 *pour* 100. *Tracer également un chemin jouissant de la même propriété et joignant* A *au sommet* S.

---

[1] Cette carte a été extraite d'un plan directeur de la 4ᵉ Armée (13 novembre 1916). Son échelle était le $\frac{1}{20000}$. Sur la figure, cette échelle a été réduite dans le rapport $\frac{1}{3}$.

Il existe évidemment une infinité de solutions pour chacun de ces deux problèmes. Nous allons chercher celles qui conduisent approximativement au chemin le plus court.

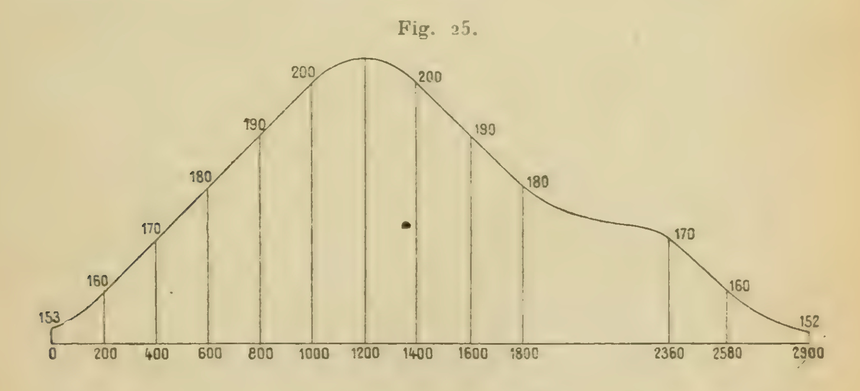
Pour joindre A et B, deux solutions paraissent à peu près équivalentes. On peut contourner par l'Est le sommet S ou bien passer par le col C. La première méthode permettrait, si l'on consentait à allonger suffisamment le chemin, d'obtenir un tracé ne comportant que de faibles élévations. La seconde, au contraire, nous oblige à monter jusqu'à l'altitude du col C, qui est comprise entre 200^{m} et 210^{m}. Mais, elle nous permet néanmoins, avec un tracé aussi court que possible, d'éviter toute pente supérieure à 5 pour 100. C'est elle que nous allons adopter.

Si nous voulons obtenir l'élévation minimum, nous devons passer exactement par le col C. Pour effectuer notre tracé, nous allons, dès lors, partir de ce point et le joindre successivement aux points A et B.

Tant que nous sommes dans les régions de forte pente, il faut donner à la route sa pente maximum de 5 pour 100. La distance horizontale entre les points de rencontre avec deux lignes de niveau consécutives doit être de 200^{m}, c'est-à-dire de 1^{cm}, en tenant compte de l'échelle. En procédant comme il a été expliqué au n° 96, on obtient successivement les points *e*, *d*, *c*, *b*, *a*, que l'on joint par un trait continu, en arrondissant l'arc *cb*, afin de contourner la ligne de niveau de cote 170.

Pour joindre C à B, on obtient d'abord le morceau de route C*fgh*. Si l'on joint ensuite *h*B par une ligne droite, on obtient un chemin dont la pente est partout inférieure à 5 pour 100, sauf entre les cotes 170 et 160. On y remédie en donnant une légère déviation vers l'Ouest, et l'on obtient finalement le dernier tronçon *hij*B.

Fig. 25.



Sur la figure 25, on a tracé le profil de la route, en portant en abscisse la distance parcourue horizontalement (mesurée au curvimètre) et en

ordonnée l'altitude au-dessus de la cote 150, évaluée à l'échelle de $\frac{1}{1000}$.

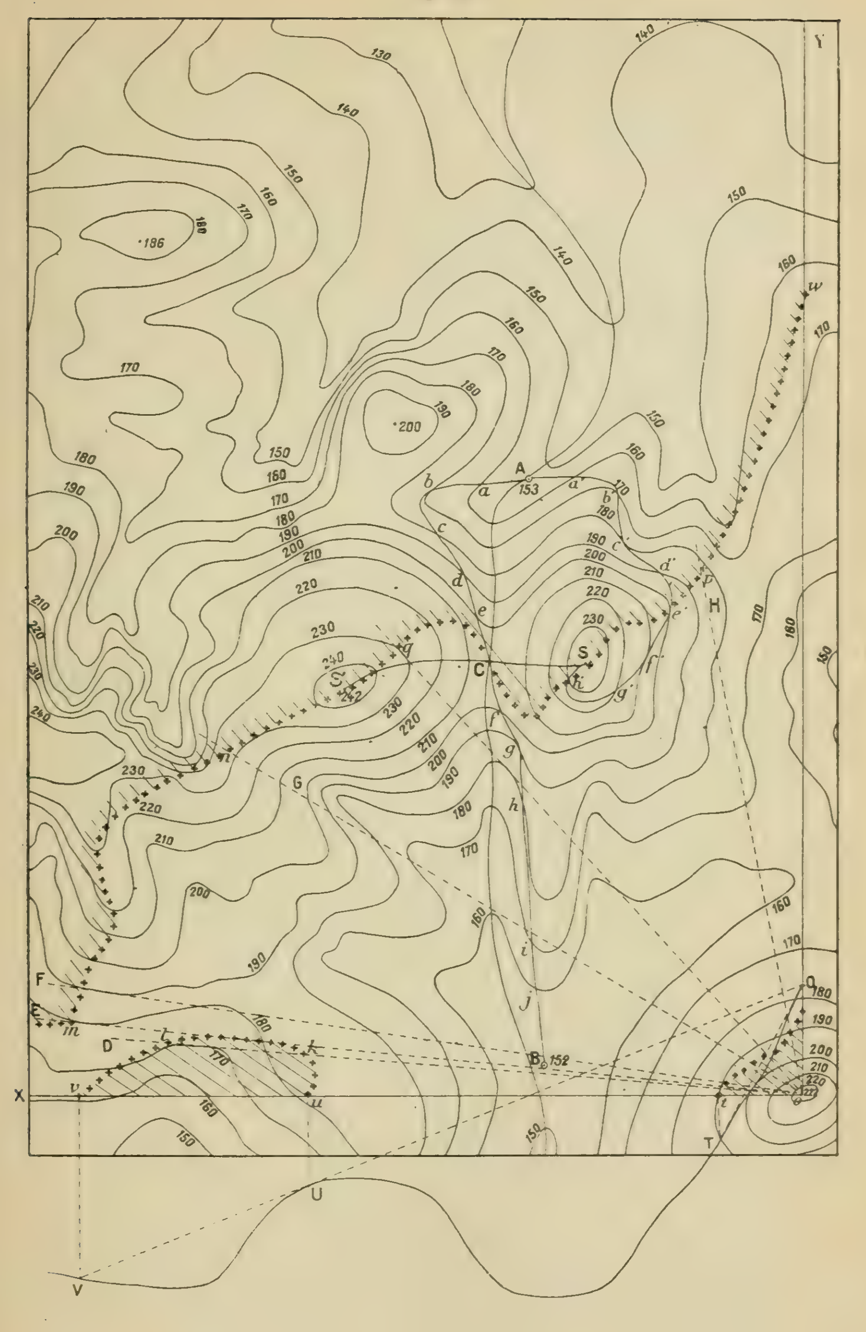
Le chemin joignant A au sommet S a, sur tout son parcours, la pente maximum de 5 pour 100, sauf tout à fait à la fin, entre h' et S.

3. *On considère, toujours sur la même carte, un observateur, dont l'œil est placé en o, à un mètre au dessus du sol. Déterminer les régions que voit cet observateur dans le secteur o*XY.

La méthode générale indiquée au n° **103** consiste à construire les profils de différentes sections par des plans verticaux passant par *o* et à mener, de ce point, les tangentes à ces profils. Sur la figure, on s'est contenté de reproduire le profil correspondant à la section *o*X. Ce profil a été construit en adoptant l'échelle de $\frac{1}{1000}$ pour les cotes et considérant la droite *o*X comme ayant la cote 200. On a marqué tous les points à cotes rondes, ainsi que le sommet de cote 222. Puis, on a joint tous ces points par un trait continu, dont la tangente au sommet est parallèle à *o*X. On a ensuite marqué le point O représentant l'œil de l'observateur, situé, par conséquent, à 1^{mm} au-dessus du sommet. De ce point, on peut mener deux tangentes au profil. La première OT est très mal déterminée, à cause de la proximité de O et de la courbe. Elle rencontre celle-ci en un point T, qui se rappelle en *t* sur *o*X. La ligne comprise entre *t* et la projection horizontale du point de contact, projection qui est très voisine de *o*, est tout entière cachée. Quand on fait tourner le plan sécant, cette ligne balaie une région environnant *o* et que l'on a couverte de hachures. De même que la tangente OT, cette région est pratiquement très mal déterminée. Cela n'est d'ailleurs pas étonnant, car il suffit que l'observateur élève son œil de quelques décimètres pour la modifier complètement et apercevoir une partie beaucoup plus grande de la contre-pente. Cette circonstance même enlève la presque totalité de l'intérêt que peut présenter la construction de cette région et il nous importe peu, en définitive, que cette construction soit peu précise.

Occupons-nous maintenant des régions éloignées. Du point O, nous pouvons mener une deuxième tangente au profil *o*X, soit OUV. L'arc UV est caché; sa projection horizontale *uv* appartient donc à une région cachée. Pour délimiter cette région, nous avons construit les profils *o*D et *o*E. Le premier nous a donné le segment caché *kl*. Quant au second, il nous a donné un segment sensiblement réduit à un point, la tangente analogue à OUV devenant à peu près une tangente d'inflexion, ce qui amène la coïncidence des points tels que U et V. Il suit de là que la courbe limite de la région actuellement envisagée est pratiquement tangente à *o*E. Nous l'avons tracée approximativement au moyen d'une ligne de petites croix et nous avons mis des hachures dans la région cachée.

Fig. 26.



Si nous reprenons le profil oE, nous constatons qu'on peut lui mener une troisième tangente, dont le point de contact est projeté horizontalement en m. Cette tangente ne rencontre pas la surface topographique dans les limites de la carte. Donc, le segment de oE compris entre m et le bord Ouest de celle-ci est entièrement caché.

Si l'on fait tourner le plan sécant en le rapprochant de oY, le point m va décrire une ligne, qui délimitera une nouvelle région cachée. Nous avons construit les points n, p, w de cette ligne situés sur les profils oG, oH, oY. Pour aucun d'eux, la rencontre du rayon visuel tangent avec le sol ne se fait dans les limites de la carte.

On peut avoir, avec une approximation pratiquement suffisante et avec une très grande rapidité, un grand nombre de points de la courbe cherchée, en utilisant la remarque suivante. Considérons une ligne de niveau N, dont la cote z diffère peu de la cote 223 de l'œil de l'observateur. Menons la tangente oq à cette ligne. Si z était rigoureusement égal à 223, il est clair que le point de contact q appartiendrait à la courbe limite, puisque cette courbe est la courbe de contact du cône circonscrit, lequel cône comprend les tangentes à la section du terrain par le plan horizontal mené par o. Si z est un peu plus grand que 223, la tangente au profil oq est légèrement inclinée de q vers o et son point de contact se projette un peu en avant de q.

Si, au contraire, z est un peu plus petit que 223, ce point de contact se projette un peu en arrière de q. En définitive, dans les régions dont l'altitude est voisine de celle de l'observateur, la courbe passe un peu en avant des points de contact des tangentes menées par o aux lignes de niveau de cote supérieure à celle de l'observateur et un peu en arrière des points de contact des tangentes aux lignes de niveau de cote inférieure.

Cela nous a permis de tracer sans aucune peine toute la partie de la courbe située dans le secteur FoH. En particulier, nous avons dû passer un peu en avant des sommets S et S' et un peu en arrière du col C. Nous avons enfin raccordé au sentiment les points p et w.

Nous nous sommes assurés, par la construction de quelques profils dans la région postérieure à la courbe de contact, qu'aucun rayon visuel tangent ne pouvait percer cette région, qui est, par suite, entièrement cachée. Nous n'avons fait qu'amorcer les hachures qui devraient la recouvrir, afin de ne pas trop brouiller la carte.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Un observateur est placé en un point donné, à une altitude donnée. Il fait un tour d'horizon, en donnant à sa lunette une inclinaison cons-

tante. Construire la ligne des points vus. (On pourrait couper par des plans verticaux. Mais, il est plus rapide de couper par des plans horizontaux. On est ramené à prendre l'intersection des lignes de niveau avec des cercles.)

2. Un canon est placé en un point donné. On le pointe successivement dans tous les azimuts, mais en lui donnant toujours la même inclinaison. Construire la ligne des points de chute. (Cette ligne est ce que les artilleurs appellent une *courbe d'égale hausse*. Pour la construire, il faut connaître la queue de la trajectoire. Le plus simple est alors de couper par des plans horizontaux, comme dans l'exercice précédent.)

3. Pour échapper à la vue de l'ennemi, un canon se défile derrière une croupe. Déterminer, pour chaque azimut, l'angle de tir minimum et en déduire la ligne en deçà de laquelle il est impossible de tirer. (*Problème du masque.*)

4. Un canon a pour objectif de battre un secteur déterminé. Construire les zones de ce secteur qui sont *en angle mort*, c'est-à-dire qui ne peuvent être atteintes par aucune trajectoire, par suite de la contre-pente. (Ce problème est analogue au problème résolu n° 3 et se résout de la même manière, en remplaçant les rayons visuels par les trajectoires. Il est commode d'avoir un abaque tracé sur papier transparent et reproduisant les queues de trajectoires à l'échelle que l'on veut adopter pour la construction des profils. On superpose cet abaque sur chacun de ceux-ci, en plaçant l'origine des trajectoires à l'emplacement du canon et l'on voit quelles sont les trajectoires qui sont tangentes au profil. On marque, pour chacune d'elles, le point de contact et le point de rencontre avec le sol. La partie du profil qui se trouve entre ces deux points est en angle mort.)

CHAPITRE IX.

NOTIONS DE PERSPECTIVE.

EXERCICES RÉSOLUS.

On donne un cube dont l'arête a 1^m *de long. Une de ses faces repose sur le géométral. Le sommet* A *le plus en avant a pour largeur et pour éloignement* 20^{cm} *et* 30^{cm}. *Le côté* AB, *qui va vers le sommet le plus à droite, a pour coefficient angulaire* 2.

Un cylindre de révolution, de $1^m 50$ *de haut, a pour base inférieure un cercle tracé dans la face supérieure du cube, concentrique à cette face et de* 40^{cm} *de diamètre.*

Enfin, dans la face verticale ADD'A' *du cube, on a tracé un demi-cercle, ayant pour centre le milieu de* AD *et pour diamètre* 50^{cm}. *Mettre cette figure en perspective, à l'échelle de* $\frac{1}{15}$, *en supposant que le point de vue a pour largeur, éloignement et hauteur :* 0, 150^{cm} *et* 155^{cm} (*fig.* 27).

Perspective de la face ABCD. — Traçons la ligne de terre LT, en marquant le point L, origine des largeurs. La ligne d'horizon est HH', à $103^{mm}\frac{1}{3}$ au-dessus de LT. Le point de fuite principal F se trouve sur la verticale de L.

Commençons par construire la perspective de A. La perpendiculaire au tableau menée par ce point rencontre la ligne de terre au point a, tel que $La = 20^{cm}$, soit $13^{mm}\frac{1}{3}$, à l'échelle du dessin. En joignant Fa, nous avons la perspective de cette perpendiculaire. Considérons maintenant la trace a_1 de AB; elle se trouve à gauche de a, à une distance de ce point égale à 15^{cm} ou 10^{mm}, à l'échelle. D'autre part, le point de fuite f de AB se trouve sur la ligne d'horizon, à 75^{cm}, ou 50^{mm} à l'échelle, à droite de F. En joignant fa_1, nous avons la perspective de AB. En prenant le point de rencontre A de Fa et de fa_1, nous avons la perspective du sommet A.

Pour trouver la perspective de B, utilisons sa projection orthogonale b sur le tableau. Nous construisons ce point b en menant par a une droite

de coefficient angulaire 2, portant $aB_1 = 1^m$ ($66^{mm}\frac{2}{3}$ à l'échelle) et projetant B_1 en b sur LT. Joignant ensuite Fb, nous avons B, à la rencontre avec fa_1.

Construisons, de même, D. Le point d est à une distance de a égale à bB_1. Quant au point de fuite de AD, il se trouve, sur HH', à une distance à gauche de F égale à 2 fois la distance principale, c'est-à-dire 4 fois Ff. Il est en dehors des limites du dessin. Pour le joindre à A, nous avons fait une homothétie, de centre A, amenant, par exemple, f en B. Menant Beh parallèle à HH', portant $eh = 4eB$ et joignant Ah, nous avons la perspective de AD. Nous en déduisons D, par la rencontre avec Fd.

Le sommet C se trouve enfin à l'intersection de fD et de Fc, le point c étant à une distance de b égale à ad.

Perspective de A'B'C'D'. — Il suffit de porter la face précédente à la hauteur 1^m. Pour A', nous menons la verticale aa' égale à $66^{mm}\frac{2}{3}$ et nous joignons Fa : A' est à la rencontre de cette droite avec la verticale de A.

Joignant A'f et prenant son intersection avec la verticale de B, nous avons B'. Nous construisons ensuite C', en utilisant la diagonale A'C', dont le point de fuite g est à l'intersection de HH' avec AC. Enfin, nous avons D', en joignant fC'.

Perspective de la base du cylindre. — C'est évidemment une ellipse, car le cercle de l'espace ne rencontre pas le plan neutre (*cf.* Exercice proposé n° 8). Il est facile d'en construire quatre points, avec leurs tangentes. Ce sont les points de contact des tangentes parallèles aux arêtes du cube. Les tangentes parallèles à A'D', par exemple, rencontrent A'B' aux points j et k, qui divisent A'B' dans le rapport $\frac{3}{10}$. Construisons ces points et, en même temps, le point milieu i, en appliquant la méthode indiquée au n° **106**. Menons, par A', une parallèle à HH' et portons-y les longueurs A'j', A'i', A'k', A'b' respectivement égales à 3, 5, 7, 10, avec une unité de longueur quelconque. Joignons b'B', jusqu'à sa rencontre en m avec HH'. Les droites mj', mi', mk' rencontrent A'B', aux points j, i, k cherchés. Prenons maintenant le point de rencontre I des diagonales A'C', B'D'. La droite kI rencontre C'D' en l; la droite jl est une des tangentes parallèles à A'D'. Son point de contact L se trouve sur fI.

Nous n'avons pas construit l'autre tangente parallèle à A'D', parce que son point de contact est caché et ne doit pas être reproduit sur le dessin.

La tangente jl rencontre A'C' en un point J, qui, joint à f, donne la perspective d'une tangente parallèle à A'B'. Son point de contact K se trouve sur iI. Celui de l'autre tangente parallèle à A'B' est caché.

Cherchons maintenant les points situés sur le *contour apparent du cylindre.* Il s'agit, bien entendu, du contour apparent pour le point de vue, c'est-à-dire des génératrices de contact des plans tangents au cylindre menés par ce point.

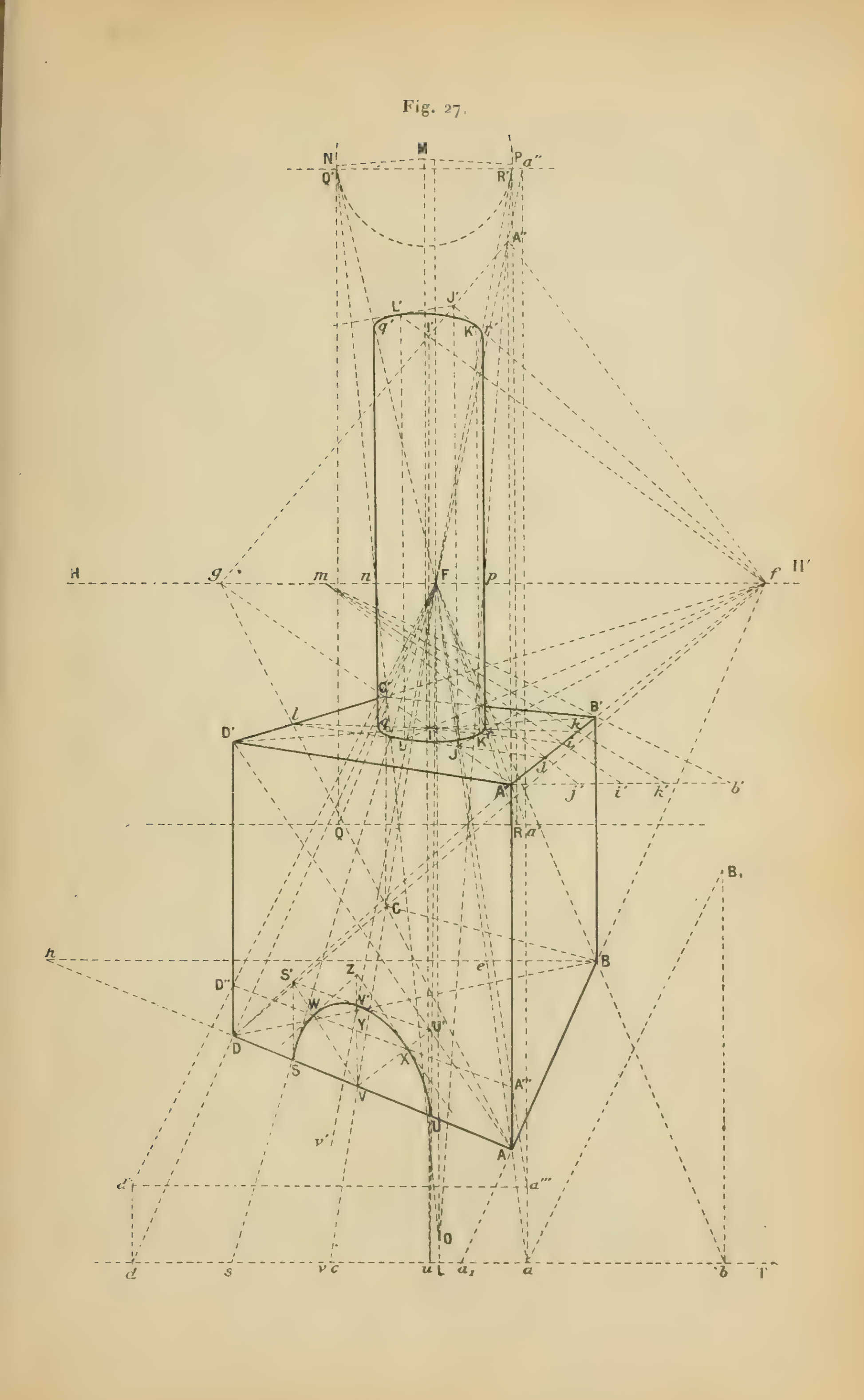
Pour construire ces plans tangents, nous appliquons la méthode générale du n° 22; mais, pour simplifier un peu les constructions, nous imaginons qu'on a pris la base du cylindre dans le plan horizontal qui passe par le point de vue. Nous devons mener, par ce point, des tangentes à cette base. A cet effet, rabattons le plan sur le tableau, la charnière étant, par conséquent, HH'.

La perpendiculaire au tableau menée par le centre du cercle a la même largeur que la perpendiculaire à LT menée par le centre du carré ABCD, lequel centre est obtenu par l'intersection des diagonales. En joignant ce point à F, on a, en u, sa projection orthogonale sur LT; la largeur cherchée est donc $\overline{Lu}$. On en déduit le rabattement de la perpendiculaire au tableau passant par le centre du cercle, en menant la verticale du point u.

Pour avoir le rabattement M de ce centre, on pourrait remarquer qu'il se trouve sur la droite joignant sa perspective (laquelle est à l'intersection de HH' avec la verticale de I) au rabattement O du point de vue ($FO = 1^m,50$, soit 100^{mm}), car ce rabattement peut être considéré comme étant le point de fuite de la droite qui, dans l'espace, joint la position initiale du point M à son rabattement. (Ce point de fuite est quelquefois appelé le *point de fuite de la corde de l'arc*, parce que la droite dont nous venons de faire mention est la corde de l'arc décrit par M pendant son rabattement.) Mais cette droite est trop peu inclinée sur la verticale et donnerait une détermination trop peu précise de M. C'est pourquoi nous avons préféré utiliser l'éloignement de ce dernier point. Cet éloignement est le même que celui du milieu de BD; il est égal à l'éloignement de A augmenté de la demi-somme des deux longueurs bB_1 et ab. En le portant sur la verticale du point u, à partir de HH', on obtient le point M.

Nous décrivons maintenant le cercle de centre M et de rayon 20 ($13^{mm}\frac{1}{3}$, à l'échelle). Puis, nous menons les tangentes à ce cercle par le point O, rabattement du point de vue. Ces tangentes ON et OP rencontrent HH' aux points n et p, qui appartiennent à la perspective des génératrices de contour apparent du cylindre. (Les perspectives de ces génératrices sont la trace des plans tangents précédents sur le plan du tableau.) En menant des verticales par n et p, on a le contour apparent.

Cherchons le point de contact q de la génératrice nq avec la base inférieure. A cet effet, nous allons construire la perspective de la perpendiculaire au tableau menée par ce point. Le pied Q de cette perpendicu-



N
M
P
Q'
R'
L'
J'
q'
K'
H
g
m
n
F
p
f
H'
B'
D'
l
A'
j'
i'
k'
b'
Q
R
C
B,
h
B
e
D''
S'
Z
W
Y
D
S
X
V
U
A
O
d
s
c
u
L
a
b
T

Fig. 27.

laire se trouve sur la verticale du point de contact N. Sa hauteur est de 1^{m} au-dessus de LT, c'est-à-dire la même que celle de a'. Il se trouve donc sur la parallèle à LT menée par a'. En joignant FQ, nous avons la perpendiculaire cherchée. Elle rencontre la verticale nq au point de contact q.

On construit de la même manière le point de contact q' avec la base supérieure, en utilisant le point Q', dont la hauteur au-dessus de Q est de $1^{m},50$, soit 100^{mm}, à l'échelle, ainsi que les points de contact r et r' de l'autre génératrice de contour apparent.

Les points L, K, q, r avec leurs tangentes suffisent pratiquement pour tracer la demi-ellipse qui constitue la perspective de la partie vue de la base inférieure du cylindre.

Quant à la base supérieure, nous en connaissons déjà deux points : q' et r', avec leurs tangentes. Nous avons construit les points L' et K' en effectuant leur mise en hauteur à partir des points L et K. A cet effet, nous avons d'abord construit le point A'', de hauteur $2^{m},50$ (a'' est sur la droite Q'R'). La droite gA'' passe par la perspective I' du centre de la base supérieure, qui se trouve aussi sur la verticale de I. Joignant fI' et prenant son intersection avec la verticale de L, nous obtenons L'. Le point J' se trouve d'autre part à la rencontre de gA'' avec la verticale de J ; J'L' est la tangente en L'. Enfin, la verticale de K rencontre en K' la droite fJ', qui est la tangente en ce point. Nous pouvons maintenant tracer la demi-ellipse q'L'K'r'.

Perspective du demi-cercle de la face ADD'A'. — Cette perspective est une demi-ellipse. Ses extrémités S et U et son centre V sont les points situés aux $\frac{3}{4}$, au $\frac{1}{4}$ et au milieu de AD. On les construit, en utilisant leurs projections orthogonales s, u, v sur LT, lesquelles sont situées respectivement aux $\frac{3}{4}$, au $\frac{1}{4}$ et au milieu de ad. (Il se trouve accidentellement que v coïncide en pratique avec c et u avec la projection du centre de ABCD.) Les droites Fs, Fu, Fv rencontrent AD aux points S, U, V cherchés. (On aurait pu aussi construire V en remarquant que la verticale de ce point doit passer par le point de rencontre de AD' et de DA'. On aurait pu ensuite construire S en remarquant que la verticale de ce point passe par le point de rencontre de D'V avec la droite joignant les milieux de AA' et de DD'. Une construction analogue aurait donné U.) Les tangentes en S et U sont verticales. Elles rencontrent DA' en S' et AD' en U'; la droite U'S' est la tangente au point V' le plus haut du cercle.

Nous avons encore construit les points W et X, extrémités des rayons du cercle inclinés à 45° sur le géométral. Pour cela, nous avons fait la mise en hauteur de la droite D''WXA'', au moyen des points D''

et A‴ $\left(dd'' = aa''' = \frac{25}{\sqrt{2}}\right.$, soit $\frac{aB_1}{4\sqrt{2}}$, à l'échelle$\left.\right)$. Cette droite rencontre VS′ et VU′ aux points W et X. Les tangentes en ces points passent par le point Z symétrique de V par rapport au point Y où WX rencontre VV′.

Nous avons maintenant 5 points et leurs tangentes; cela suffit pour tracer la demi-ellipse.

Ponctuation. — Dans un dessin en perspective, l'usage n'est pas, comme en Géométrie descriptive, de ponctuer les lignes cachées. On ne les trace pas. C'est pourquoi nous avons seulement marqué comme lignes de construction les arêtes CB, CD, CC′ du cube, ainsi que les portions des arêtes C′B′ et C′D′ qui sont cachées par le cylindre. De même, nous n'avons tracé que les demi-ellipses représentant les arcs vus des deux bases de celui-ci.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On donne la perspective d'une droite par son point de fuite et un point quelconque. Marquer, sur la droite, à partir de ce dernier point, une série de points équidistants. (*Cf.* n° 106, problème I.)

2. On donne, sur la perspective d'une droite, le point de fuite f et trois points a, b, a'. Construire le point b' tel que, dans l'espace, A′B′ se déduise de AB par une translation. (*Cf.* n° 106, problème I. On choisit arbitrairement aB, en dehors de la droite ab. On mène Bb et la parallèle à aB par f. On prend l'intersection P de ces deux droites. On joint Pa' jusqu'à sa rencontre A′ avec aB. On porte $\overline{A'B'} = \overrightarrow{aB}$; PB′ rencontre ab au point b'.)

3. On donne, sur la perspective d'une droite, un segment ab, dont la longueur dans l'espace est l'unité. Porter, sur cette droite, à partir d'un point donné c, une longueur donnée. (*Cf.* exercice précédent.)

4. On donne les points de fuite du problème II du n° 106. Construire les bissectrices d'un angle donné. (Si h et h' sont les points de fuite de cet angle, il suffit de mener les bissectrices de hPh'.)

5. En supposant toujours les mêmes données, construire la symétrique d'une droite par rapport à une autre droite.

6. On donne toujours les mêmes points de fuite. On donne, en outre, trois points a, b, c du plan. Construire la perspective du centre du cercle ABC, ainsi que les perspectives des points diamétralement opposés

à A, B, C et des tangentes en tous ces points. (Mener les perpendiculaires au milieu des côtés, pour construire le centre. Pour les tangentes, mener les perpendiculaires aux rayons.)

7. On donne la perspective d'un triangle équilatéral ABC et la ligne de fuite du plan. Construire la perspective du centre et celle d'un autre triangle égal et concentrique au proposé. [Le centre s'obtient par les médianes, lesquelles donnent aussi, avec les côtés, trois couples de droites rectangulaires, d'où l'on peut déduire le point P du n° **106**. Pour construire le deuxième triangle, prendre un point quelconque A′ sur le cercle ABC (n° **106**, problème III); tracer les deux droites faisant 30° avec le diamètre qui passe par ce point et prendre les seconds points de rencontre de ces droites avec le cercle.]

8. Comment trouve-t-on le genre et les directions asymptotiques de la perspective d'une conique donnée de l'espace? Quelle est la condition pour que cette perspective soit une parabole ou une hyperbole équilatère? (Intersection de la conique avec le *plan neutre*, ou plan parallèle au tableau mené par le point de vue.)

9. Une quadrique admet le point de vue comme ombilic, le plan tangent en ce point étant le plan neutre. Démontrer que toute section plane de cette quadrique a une perspective circulaire. Quel est l'axe radical des perspectives des sections faites par deux plans parallèles?

10. Construire le centre de la perspective d'une conique donnée de l'espace. (Perspective du pôle de l'intersection du plan neutre avec le plan de la conique.)

11. On donne les points de fuite a, b, c des arêtes d'un trièdre trirectangle, ainsi que le point de fuite p et la ligne de fuite D d'une droite et d'un plan perpendiculaires. Construire le point de fuite p' des perpendiculaires à un autre plan dont on donne la ligne de fuite D′. (La perspective du cercle imaginaire de l'infini est une conique S conjuguée par rapport au triangle abc et admettant p et D pour pôle et polaire. Elle est entièrement déterminée et il faut construire le pôle de D′ par rapport à cette conique. Soit a' le point de rencontre de D′ avec bc; la polaire de ce point passe par a et par le point homologue de a' dans l'involution dont deux couples de points homologues sont b, c et les points de rencontre de bc avec D et pa. On peut donc construire cette polaire, ainsi que les polaires des points b' et c' analogues à a'. Ces trois polaires concourent au pôle cherché.)

12. On donne, dans le géométral, un carré ABCD, de 2^m de côté et dont le sommet A le plus en avant a pour largeur et éloignement 30^{cm}. Le côté AB qui va vers le sommet le plus à droite a pour coefficient angulaire $\frac{3}{2}$. Un hexagone régulier concentrique au carré a une diagonale parallèle à AD et de longueur égale à 20^{cm}. Le carré est recouvert d'une mosaïque formée par la juxtaposition d'hexagones égaux dont l'un est l'hexagone ci-dessus. Faire la perspective de cette mosaïque, en supposant que le point de vue a pour largeur 0, pour éloignement 2^m et pour hauteur $1^m,60$. Prendre pour échelle $\frac{1}{10}$.

13. Un escalier est composé de 5 marches parallèles ayant chacune $1^m,20$ de largeur, $0^m,35$ de profondeur et $0^m,20$ de hauteur. On suppose que la première marche repose sur le géométral; elle fait 35° avec la ligne de terre et son extrémité de droite a pour largeur $0^m,65$ et pour éloignement $0^m,10$. Faire la perspective de cet escalier, à l'échelle de $\frac{1}{10}$, en donnant au point de vue les mêmes coordonnées que dans l'exercice précédent.

14. Un cylindre de révolution à axe vertical, de $0^m,80$ de rayon et de 3^m de haut repose par sa base inférieure sur le géométral, le centre de cette base ayant pour largeur 0 et pour éloignement $1^m,50$. Il traverse un prisme droit à base carrée et horizontale, de $0^m,40$ de haut et de $2^m,20$ de côté. Le centre de ce prisme se trouve au milieu de la hauteur du cylindre; de plus, une de ses faces fait 30° avec le tableau. Mettre l'ensemble de ces deux solides en perspective, en supposant que le point de vue a pour largeur 0, pour éloignement 2^m et pour hauteur $1^m,50$. Echelle : $\frac{1}{10}$.

15. Faire la perspective d'un tétraèdre régulier, de 2^m d'arête, dont une face est horizontale, dont le centre a pour largeur $0^m,20$, pour éloignement $1^m,60$ et pour hauteur 1^m et dont le sommet le plus en avant a pour largeur $0^m,40$. On prendra le même point de vue et la même échelle que dans l'exercice précédent.

CHAPITRE X.

RÉSOLUTION DES TRIÈDRES.

EXERCICES PROPOSÉS (1).

1. Dans un trièdre, on donne la face c, le dièdre A et l'angle que fait l'arête SC avec la face opposée. Construire ce trièdre. (On est ramené à prendre l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution.)

2. Résoudre le trièdre précédent, en supposant qu'on donne la face a au lieu du dièdre A. (Intersection de deux cônes.)

3. Le plan bissecteur du dièdre SA coupe la face opposée suivant SA'. Résoudre le trièdre, connaissant l'angle ASA', le dièdre A et la face b. (La construction du dièdre SAA' rentre dans le deuxième cas.)

4. Résoudre le trièdre précédent, connaissant l'angle ASA' et les dièdres A et B. (Rentre dans le cinquième cas.)

5. Construire un tétraèdre ABCD, connaissant les longueurs des arêtes AB, BC, CA et les dièdres qui les admettent pour arêtes.

6. Construire le tétraèdre ABCD, connaissant les arêtes AB, BC, CA et les hauteurs issues des sommets A, B, C. (Se ramène à l'exercice précédent, car, des hauteurs, on peut déduire les dièdres.)

7. Construire le tétraèdre ABCD, connaissant la face ABC et sachant que le trièdre de sommet D est trirectangle. (Intersection de trois sphères.)

8. Construire un tétraèdre connaissant les longueurs de ses six arêtes.

---

(1) Nous ne donnons pas d'exercices résolus, les questions traitées dans le cours en tenant suffisamment lieu.

9. Construire le tétraèdre ABCD, connaissant les dièdres AB, AC, et les longueurs AB, BC, CA, BD.

10. Construire le tétraèdre ABCD, connaissant les mêmes éléments que dans l'exercice précédent, sauf que la longueur BD est remplacée par l'angle ABD.

11. Même question en remplaçant la longueur BD par l'angle ADB.

12. Construire le tétraèdre ABCD, connaissant la face ABC, les angles BAD, CAD et le volume du tétraèdre.

13. On donne un tétraèdre par sa face ABC dans le plan horizontal et par la projection horizontale et la cote du sommet D. Construire le centre de la sphère circonscrite.

14. Les données étant les mêmes que précédemment, construire le centre de la sphère inscrite. (La construction du tétraèdre qui admet pour sommet ce centre et pour base ABC se ramène à l'Exercice n° 5. On peut aussi appliquer la méthode de *Hermary*, qui consiste à rabattre le sommet D sur la face ABC successivement autour des trois côtés de cette face, vers l'intérieur du triangle. Les points de contact de la sphère inscrite avec les faces de sommet D se rabattent sur la projection horizontale du centre cherché, laquelle projection est à égale distance des trois rabattements de D.)

TRIGONOMÉTRIE

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Quelle relation doit exister entre les trois nombres a, b, c pour que l'on ait*

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc\,tang} a + \operatorname{arc\,tang} b + \operatorname{arc\,tang} c = \frac{\pi}{4}\,?$$

Appelons x, y, z les arcs du premier membre. On doit avoir

$$\operatorname{tang}(x + y + z) = 1$$

ou (nº **126**)

$$\frac{S_1 - S_3}{1 - S_2} = 1,$$

$$\text{(2)} \qquad S_1 + S_2 - S_3 - 1 = 0,$$

en appelant S_1, S_2, S_3 les fonctions symétriques élémentaires de a, b, c.

Cette condition est nécessaire; mais, on n'est pas toujours certain qu'elle est suffisante. Quand elle est remplie, on peut seulement affirmer que la somme $S = x + y + z$ est égale à $\frac{\pi}{4} + k\pi$. Comme x, y, z sont chacun compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, S est compris entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$ et le nombre entier k ne peut être égal qu'à 0, ou 1 ou -1; autrement dit, S est égal à $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$.

Voyons comment on pourra reconnaître dans quel cas l'on se trouve.

Pour que S soit égal à $\frac{5\pi}{4}$, il faut que les trois nombres a, b, c soient

tous plus grands que 1, car, la somme de deux quelconques des arcs x, y, z ne pouvant atteindre π, le troisième arc doit nécessairement dépasser $\frac{\pi}{4}$. Cette condition nécessaire est évidemment suffisante, car, si elle est remplie, chacun des arcs dépasse $\frac{\pi}{4}$ et S ne saurait être égal à $\frac{\pi}{4}$, ni à $-\frac{3\pi}{4}$.

Pour que $S = -\frac{3\pi}{4}$, il faut que deux au moins des nombres a, b, c soient négatifs, l'un d'eux au moins étant inférieur à -1. En effet, si a et b, par exemple, étaient positifs, il en serait de même de x et de y, donc de $x+y$; comme z ne peut être inférieur à $-\frac{\pi}{2}$, S ne pourrait atteindre $-\frac{3\pi}{4}$. D'autre part, si a, b, c étaient tous supérieurs à -1, x, y, z seraient chacun plus grand que $-\frac{\pi}{4}$ et S dépasserait $-\frac{3\pi}{4}$.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, supposons, par exemple, $a < -1$ et $b < 0$. La somme $x+y$ est $< -\frac{\pi}{4}$; comme $z < \frac{\pi}{2}$, S est inférieure à $\frac{\pi}{4}$ et ne peut être qu'égale à $-\frac{3\pi}{4}$.

En résumé, les seuls cas où l'égalité (2) n'entraîne pas l'égalité (1) sont le cas où les trois nombres a, b, c sont > 1 $\left(S = \frac{5\pi}{4}\right)$ et le cas où deux au moins de ces nombres sont négatifs, l'un d'eux étant en outre < -1 $\left(S = -\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. *Calculer* $\cos\frac{\pi}{5}$ *et* $\sin\frac{\pi}{5}$. — On peut y arriver en appliquant l'un quelconque des problèmes I, II, III. On peut indifféremment prendre $a = 0$ ou π, se donner le cosinus ou le sinus de cet angle et enfin prendre pour inconnue $\cos\frac{a}{5}$ ou $\sin\frac{a}{5}$. Pour voir quelle est la méthode la plus avantageuse, cherchons à prévoir le type d'équation auquel nous serons conduits, en écrivant *a priori* ses racines.

Au lieu d'employer les formules (2) et (3), comme nous l'avons fait au n° 128, procédons géométriquement, en cherchant les extrémités des arcs $\frac{a}{5}$. Ces points sont toujours les sommets de deux pentagones réguliers convexes, dont chaque côté sous-tend l'arc $\frac{2\pi}{5}$. Ces deux pentagones sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Ox ou à Oy, suivant que l'on s'est donné $\cos a$ ou $\sin a$. Enfin, l'un deux a pour sommet particulier le

point A situé sur la partie positive de Ox, si l'on a pris $a = 0$ ou le point diamétralement opposé A′, si l'on a pris $a = \pi$ $\left(\text{car } \pi = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right)$. Dans tous les cas, chacun des deux polygones admet Ox pour axe de symétrie. Il y a donc avantage, pour avoir le plus petit nombre de racines, à les projeter sur Ox, puisque les projections des sommets se confondront deux à deux. Cela veut dire qu'il faut prendre $\cos\frac{a}{5}$ pour inconnue. En outre, on réduira encore le nombre des racines en s'arrangeant pour que les deux polygones soient symétriques l'un de l'autre par rapport à Ox, et, par conséquent, confondus; pour cela, on se donnera $\cos a$.

Dès lors, donnons-nous, par exemple, $\cos a = 1$ et prenons pour inconnue $x = \cos\frac{a}{5}$. Les deux polygones se confondent avec le pentagone régulier inscrit qui admet A pour l'un de ses sommets. Les racines de l'équation en x seront 1 (racine simple), $\cos\frac{2\pi}{5}$ (racine double) et $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$ (racine double). Quand nous nous serons débarrassés de la racine 1, il nous restera donc une équation du quatrième degré admettant deux racines doubles. Son premier membre sera un carré parfait et sa résolution se ramènera à la résolution d'une équation du second degré.

Faisons les calculs. Pour $m = 5$, la formule (32) du n° **127** s'écrit

$$\cos 5a = \cos^5 a - 10\cos^3 a \sin^2 a + 5\cos a \sin^4 a.$$

Remplaçons-y $\cos 5a$ par 1, $\cos a$ par x et $\sin^2 a$ par $1 - x^2$. Nous obtenons

$$x^5 - 10x^3(1 - x^2) + 5x(1 - x^2)^2 - 1 = 0.$$

Le facteur $x - 1$ est en évidence, si l'on rapproche le premier et le dernier terme. Supprimons-le; il vient

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + 10x^3(1 + x) + 5x(x^2 - 1)(x + 1) = 0,$$

ou

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

ou enfin

$$(4x^2 + 2x - 1)^2 = 0.$$

Les racines du trinome du second degré sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. La racine positive est $\cos\frac{2\pi}{5}$ et la racine négative est $-\cos\frac{\pi}{5}$. Finalement, nous avons

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Pour calculer $\sin\frac{\pi}{5}$, appliquons la formule (5) du n° 121 :

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8},$$

d'où

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Chercher des solutions simples de l'Exercice résolu n° 1, permettant de calculer π par un développement en série. (*Cf.* t. I, chap. VII, Exercice résolu n° 6.)

[Il faut que a, b, c soient < 1, en valeur absolue, pour la convergence. On cherchera, par exemple, des solutions de la forme

$$a = \frac{1}{m}, \qquad b = \frac{1}{n}, \qquad c = \frac{m(n-1)-(n+1)}{m(n+1)+(n-1)},$$

m et n désignant des nombres entiers. On donnera à n des valeurs entières positives; puis, à chaque valeur de n ainsi choisie, on associera successivement les valeurs entières et positives de m, qui lui sont inférieures ou égales et l'on retiendra les combinaisons donnant une valeur simple pour c. On ne diminue pas la généralité des solutions en supposant m et n positifs, car, si a, b, c ont des valeurs absolues plus petites que 1, deux de ces nombres au moins doivent être positifs et l'on peut toujours supposer que ce sont les deux premiers.

Comme solutions simples, on trouvera, par exemple :

$n = 2$, $\quad m = 2$, $\quad c = -\frac{1}{7}$;

$n = 3$, $\quad m = 3$, $\quad c = \frac{1}{7}$;

$n = 4$, $\quad m = 3$, $\quad c = \frac{2}{9}$; $\quad n = 4$, $\quad m = 2$, $\quad c = \frac{1}{13}$;

$n = 5$, $\quad m = 3$, $\quad c = \frac{3}{11}$; $\quad n = 5$, $\quad m = 2$, $\quad c = \frac{1}{8}$; $\quad$ etc.]

2. Quelle relation doit-il exister entre les nombres a, b, c pour que l'on ait

$$\operatorname{arc\,tang} a + \operatorname{arc\,tang} b + \operatorname{arc\,tang} c = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi.$$

3. Établir, par récurrence, les formules (29), (30) et (31) du n° 126. (On s'appuiera sur les formules de la note de la page 282 du Tome I.)

4. Quelle relation doit-il exister entre a et b pour que l'on ait

$$4 \operatorname{arc\,tang} a + \operatorname{arc\,tang} b = \frac{\pi}{4}.$$

Chercher les solutions simples pour lesquelles a et b sont < 1, en valeur absolue (*cf.* Exercice proposé n° 1). On retrouvera, en particulier, la formule donnée dans l'Exercice résolu n° 6 du Chapitre VII du Tome I. (Résoudre la relation obtenue par rapport à b : puis, donner à a des valeurs de la forme $\frac{1}{m}$.)

5. Écrire les développements de $\cos(a+b+c)$ et de $\sin(a+b+c)$, sous forme entière.

6. Écrire, sous forme entière, les développements de $\cos 3a$, $\sin 3a$, $\cos 4a$, $\sin 4a$, $\cos 5a$, $\sin 5a$.

7. Démontrer que $\cos ma$ est toujours un polynome entier en $\cos a$. Dans quel cas est-ce aussi un polynome entier en $\sin a$? Dans quel cas $\sin ma$ est-il un polynome en $\sin a$? Peut-il être un polynome en $\cos a$?

8. Faire complètement la discussion des problèmes I à IV des n°s 128 et 130, d'abord par les formules (2), (3), (4) du n° 120, puis par l'interprétation géométrique au moyen des polygones réguliers (*cf.* Exercice résolu n° 2). Chercher, en particulier, les cas où il y a des racines doubles (cas où les polygones sont symétriques par rapport à Ox, Oy ou O).

9. Calculer $\operatorname{tang}\frac{a}{3}$ connaissant $\operatorname{tang} a$. En déduire une méthode de résolution de l'équation générale du troisième degré.

(On fait un changement de variable de la forme $x = my + n$, de manière à pouvoir identifier l'équation en y avec l'équation en $\operatorname{tang}\frac{a}{3}$.)

10. Démontrer que $\cos^2\frac{\pi}{7}$ est racine d'une équation du troisième degré à coefficients entiers. (É. P., 1922.)

11. Démontrer la formule

$$\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{12} + \operatorname{tang}^2\frac{3\pi}{12} + \operatorname{tang}^2\frac{5\pi}{12} = 15. \qquad \text{(É. P., 1912.)}$$

(Partir de l'équation qui donne $\tang \frac{a}{11}$ connaissant $\tang a = 0$. On aboutit à une équation du cinquième degré en x^2, qui admet pour racines les termes de la somme ci-dessus et, en outre, $\frac{1}{3}$ et 3.)

12. Démontrer que si a, b, c sont les angles d'un triangle, on a

$$\begin{vmatrix} \tang a & 1 & 1 \\ 1 & \tang b & 1 \\ 1 & 1 & \tang c \end{vmatrix} = 2.$$

[Développer par la règle de Sarrus et se servir du développement de $\tang(a+b+c)$.]

13. Gardant l'hypothèse précédente, démontrer la relation

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1.$$

(On peut exprimer le premier membre en fonction linéaire de cosinus des angles $2b$, $2c$, $a+b-c$, $a-b+c$.)

14. Gardant toujours la même hypothèse, démontrer la relation

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \frac{1}{\cos a} & \frac{1}{\cos b} & \frac{1}{\cos c} \\ \frac{1}{\sin a} & \frac{1}{\sin b} & \frac{1}{\sin c} \end{vmatrix} = 0.$$

(Chasser les dénominateurs et exprimer tout en fonction des cosinus des angles $2a$, $2b$, $2c$.)

15. Gardant toujours la même hypothèse, démontrer la relation

$$\sin 2a + \sin 2b - \sin 2c = 2(\sin a + \sin b - \sin c)(\cos a + \cos b + \cos c - 1).$$

(É. P., 1912.)

16. Dans la théorie des équations réciproques, on doit exprimer $z_m = x^m + \frac{1}{x^m}$ en fonction de $y = x + \frac{1}{x}$ (t. I, n° 243). Montrer que, si l'on pose $y = 2\cos a$, on a $z_m = 2\cos ma$. En déduire l'expression de z_m en fonction de y.

17. Calculer les deux sommes

$$S = \cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos(a+nh),$$
$$S' = \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin(a+nh).$$

(Multiplier chaque somme par $2\sin\frac{h}{2}$ et transformer chaque produit en différence. *Cf.* t. I, chap. VII, Exercice résolu n° 7.)

18. Soient n et p deux nombres entiers quelconques et x un angle quelconque; démontrer les identités

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2p\pi}{n}\right) + \cos\left(x + \frac{4p\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left[x + \frac{2(n-1)p\pi}{n}\right] = 0,$$

si $\frac{p}{n}$ n'est pas entier;

$$\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2p\pi}{n}\right) + \cos^2\left(x + \frac{4p\pi}{n}\right) + \ldots + \cos^2\left[x + \frac{2(n-1)p\pi}{n}\right] = \frac{n}{2},$$

si $\frac{2p}{n}$ n'est pas entier.

[La seconde se ramène à la première, par la formule (58) du n° 132. Quant à la première, on peut la déduire de l'exercice précédent. On peut aussi s'appuyer sur l'équation qui donne $\cos x$, connaissant $\cos nx$, en remarquant que la somme de ses racines est nulle. Cette somme est égale à la somme proposée, en vertu du théorème d'Arithmétique connu sous le nom de théorème de Wilson, dans le cas où p est premier avec n. Si p n'est pas premier avec n, il suffit de remplacer, dans la somme donnée, $\frac{p}{n}$ par la fraction irréductible égale. La somme se décompose alors en plusieurs sommes nulles séparément.]

19. Résoudre les équations suivantes :

$$\tan(x+a) + \tan(x-a) = \tan^2 x. \quad \text{(É. P., 1911.)}$$
$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1. \quad \text{(É. P., 1911.)}$$
$$(1+k)\frac{\cos x \cos(2x-a)}{\cos(x-a)} = 1 + k\cos 2x,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = m\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

[La première se transforme en

$$\sin 2x(\cos 2x - \cos 2a) = 0.$$

Pour la seconde, on peut prendre pour inconnue $x + \frac{\pi}{4} = y$; on aboutit à une équation du troisième degré en $\sin y$, qui admet une racine double. On peut aussi remarquer que si l'on fait passer le terme constant au premier membre, celui-ci est divisible par $(1 - \cos x)$; le quotient est ensuite divisible par $(1 - \sin x)$.

La troisième se transforme en

$$\sin(2x - a) = k \sin a.$$

Pour la quatrième, prendre $\frac{\pi}{4} - x = y$ pour inconnue.]

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Démontrer que, dans tout triangle, on a l'identité*

$$\left\| \frac{1}{p-a} \quad \cos A \quad 1 \right\| = 0.$$

Première démonstration. — En retranchant la troisième colonne de la seconde, cette égalité se ramène à la suivante

$$\left\| \frac{1}{p-a} \quad \cos^2\frac{A}{2} \quad 1 \right\| = 0.$$

Remplaçons-y $\cos^2\frac{A}{2}$ par $\frac{p(p-a)}{bc}$, en vertu de la formule (8) du n° 135; l'égalité devient, en chassant les dénominateurs,

$$\| 1 \quad a(p-a)^2 \quad p-a \| = 0.$$

Pour que ce déterminant soit nul, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer l et m pour que l'on ait (t. I, n° 293)

$$(1) \qquad a(p-a)^2 + l(p-a) - m = 0$$

et les deux relations analogues en b et c. Or, si, dans cette relation, on regarde l, m, p comme donnés, on a une équation du troisième degré en a, dont les racines doivent être a, b, c. La somme de ces trois racines doit être égale à $2p$. Or, c'est bien ce qui a lieu, comme on le voit en calculant les deux premiers termes. Cette condition étant remplie, on peut toujours déterminer l et m de manière que le coefficient de a et le terme constant aient des valeurs données quelconques, c'est-à-dire de manière que l'équation (1) ait pour racines les côtés d'un triangle quelconque, de périmètre $2p$. C. Q. F. D.

Deuxième démonstration. — Considérons le cercle inscrit dans le

triangle et soient A′, B′, C′ les points de contact avec les côtés BC, CA, AB. On a

$$AB' + CA' + BA' = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = p;$$

or, $CA' + BA' = a$; donc,

$$AB' = p - a.$$

D'autre part, le triangle rectangle IB′A donne

$$(2) \qquad r = (p - a)\operatorname{tang}\frac{A}{2};$$

d'où

$$\frac{1}{p-a} = \frac{1}{r}\operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

Portons cette formule et les deux formules analogues dans l'identité à démontrer; elle devient

$$\left\| \operatorname{tang}\frac{A}{2} \quad \cos A \quad 1 \right\| = 0,$$

ou, en développant suivant la première colonne,

$$\sum \operatorname{tang}\frac{A}{2}(\cos B - \cos C) = 0,$$

ou, en transformant $\cos B - \cos C$ en un produit et remarquant que $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$,

$$\sum \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = 0.$$

Or, le premier membre de cette égalité n'est autre que le développement suivant la première colonne du déterminant

$$\left\| \sin\frac{A}{2} \quad \sin\frac{A}{2} \quad \cos\frac{A}{2} \right\|,$$

qui est nul, comme ayant deux colonnes identiques.

2. *Résoudre un triangle, connaissant les trois hauteurs.* (É. P., 1911.)

Soient h, h', h'' les hauteurs respectivement opposées aux côtés a, b, c et soit S la surface du triangle. On a

$$(1) \qquad a = \frac{2S}{h}, \qquad b = \frac{2S}{h'}, \qquad c = \frac{2S}{h''},$$

$$(2) \qquad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Nous avons quatre équations à quatre inconnues : a, b, c, S. Pour simplifier l'écriture, désignons par i, i', i'' les inverses des hauteurs et par $2q$ la somme de ces inverses. Nous avons

(3) $$p = 2Sq, \quad p - a = 2S(q - i), \quad p - b = 2S(q - i'), \quad p - c = 2S(q - i'')$$

Portant dans (2), il vient

(4) $$S^2 = \frac{1}{16q(q-i)(q-i')(q-i'')}.$$

De (4), on tire S; portant dans (3), on a ensuite p, a, b, c et l'on est ramené au premier cas (n° 135).

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que chacune des quantités i, i', i'' soit inférieure à la somme des deux autres, ce qui entraîne évidemment la réalité de la valeur de S donnée par (4).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Déduire des formules du premier groupe l'identité

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

(En développant par la règle de Sarrus, on retrouve l'Exercice 13 du Chapitre I.)

2. Dans toute relation homogène entre les côtés d'un triangle, on peut remplacer a, b, c par $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$. En appliquant ce principe, déduire des formules du deuxième groupe, l'Exercice 13 du Chapitre I. (Remplacer, dans cet exercice, A, B, C par $\pi - A$, $\frac{\pi}{2} - B$, $\frac{\pi}{2} - C$, si B et C sont aigus, et par A, $B - \frac{\pi}{2}$, $C + \frac{\pi}{2}$, si B est obtus.)

3. Simplifier la somme $\sum \frac{b+c}{p} \cos A$. (E. P., 1911.)
(Utiliser le premier groupe.)

4. Démontrer les identités

(1) $$\sum \frac{\cos B - \cos C}{p - a} = 0;$$

(2) $$\sum (p-a)(b-c)\cos A = 0.$$

[Employer la formule (8) du n° 135, pour (1) et la formule (9), pour (2).]

5. Démontrer l'identité

$$b\left(\operatorname{tang}\frac{A}{2}+\operatorname{tang}\frac{B}{2}\right)+c\left(\operatorname{tang}\frac{A}{2}+\operatorname{tang}\frac{C}{2}\right)=\frac{2a}{\sin A}.$$

(Utiliser le principe de l'Exercice 2; puis, exprimer tout en fonction des demi-angles.)

6. Démontrer que si $B-C=\frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}.$$

(Même méthode que pour l'Exercice précédent.)

7. Démontrer que si les côtés d'un triangle sont en progression arithmétique, *a* étant le côté moyen, on a les identités

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{1}{3},\qquad \cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{A}{2}.$$

(Partir de $b+c=2a$.)

8. Résoudre les triangles ci-dessous :

(1)	$a=134,25$;	$b=253,48$;	$c=198,56$;
(2)	$b=26,342$;	$c=76,225$;	$A=62^g,473$;
(3)	$a=2534,8$;	$b=3460,2$;	$A=35^g,472$;
(4)	$a=974,28$;	$b=603,37$;	$A=148^g,227$;
(5)	$a=3.5892$;	$B=46^g,138$;	$C=118^g,793$.

9. Résoudre un triangle, connaissant :

1° Un côté et la médiane et la hauteur opposées à ce côté;
2° Un côté, l'angle et la médiane opposés;
3° Un angle et la hauteur et la médiane issues du sommet de cet angle.

10. Résoudre un triangle, connaissant les trois médianes. (E. P., 1923.)

11. Résoudre un triangle, connaissant un côté, l'angle et la bissectrice opposés. (Introduire les segments déterminés par la bissectrice sur le côté donné et écrire que leur somme est égale à ce côté.)

12. Résoudre un triangle connaissant les trois angles et le produit des trois hauteurs. (E. P., 1911.)

[Si P désigne le produit donné, on a

$$8\,R^3 = \frac{P}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}.\Big]$$

13. Résoudre un triangle, connaissant A, a, $b+c$. (E. P., 1911.)

14. Résoudre un triangle, connaissant un côté, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit. (E. P., 1911.)

[En utilisant la formule (17) du n° 135, on trouve p, d'où $b+c$. La formule (2) de l'Exercice résolu n° 1 donne ensuite A. On est alors ramené à l'exercice précédent.]

15. Résoudre un triangle, connaissant a, b, et sachant que $B = 3A$. (E. P., 1911.)

$\left(\text{On a : } \sin 3A = \frac{b}{a} \sin A.\right)$

ERRATA DU TOME III (*EXERCICES*).

Page 92, ligne 9, *lire* 1115 *au lieu de* 115.
Page 93, dernière ligne, *lire* 100 *au lieu de* 600.
Page 94, ligne 20, *lire* 0,6 *au lieu de* 0,7.
Page 161, dernière ligne, *lire* $2^m,60$ *au lieu de* $3^m,20$.
Page 188, ligne 7 en remontant, *lire* 35 *au lieu de* 25.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME IV.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
68465 Quai des Grands-Augustins, 55.